Symmetriske matricer

Sætn. Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er ortogonale

bevis $A\bar{u} = \lambda \bar{u}$, $A\bar{v} = \mu \bar{v}$, $\lambda \neq \mu$

$$\left.\begin{aligned} A\bar{u}\cdot\bar{v} &= \lambda \bar{u}\cdot\bar{v} = \lambda(\bar{u}\cdot\bar{v}) \\ A\bar{u}\cdot\bar{v} &= \bar{u}\cdot A^T\bar{v} = \bar{u}\cdot A\bar{v} = \bar{u}\cdot\mu\bar{v} = \mu(\bar{u}\cdot\bar{v}) \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ($\bar{u}\cdot\bar{v} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu$, modstrid)

$\Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$

eks. egenværdiproblemet for $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ er

Tidligere løst: $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\bar{x} = r(-1,0,1)$, $r \neq 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $\bar{x} = s(1,-2,1)$, $s \neq 0$

$\lambda = 1$, $\bar{x} = t(1,1,1)$, $t \neq 0$

bemærk $(-1,0,1) \perp (1,-2,1)$, $(-1,0,1) \perp (1,1,1)$

og $(1,-2,1) \perp (1,1,1)$

Algebraens fundamentalsætning (u/ bevis)

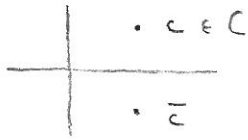
Inden for de komplekse tal gælder:

Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har en rod.

Sætn. Alle egenværdier for en symmetrisk matrix er reelle

Først lidt baggrund

i Den komplekst konjugerede til $c = a+ib$: $\bar{c} = a - ib$



ii Vektornotation moderemos til $\underline{x}$

(ellers konflikt med komplekst konjugeret notation)

iii I $\mathbb{C}^n$ defineres prikprodukt $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_i x_i \bar{y}_i$ og symmetriregln erstattes af konjugeret symmetri, dvs. $\underline{x} \cdot \underline{y} = \overline{\underline{y} \cdot \underline{x}}$, hvorefter

$$\underline{x} \cdot c\underline{y} = \overline{c\underline{y} \cdot \underline{x}} = \bar{c}\,(\overline{\underline{y} \cdot \underline{x}}) = \bar{c}\,(\underline{x} \cdot \underline{y})$$

Bevis for sætn.

λ egenværdi og $\underline{x}$ egenvektor for $A = A^T$

$$\left.\begin{aligned} A\underline{x} \cdot \underline{x} &= \lambda \underline{x} \cdot \underline{x} = \lambda \|\underline{x}\|^2 \\ A\underline{x} \cdot \underline{x} &= \underline{x} \cdot A^T \underline{x} = \underline{x} \cdot A\underline{x} = \underline{x} \cdot \lambda \underline{x} = \bar{\lambda} \|\underline{x}\|^2 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$ reel, idet

$\alpha + i\beta = \alpha - i\beta \Rightarrow 2i\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \in \mathbb{R}$

Sætn. A symmetrisk $\Leftrightarrow$ Der findes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A

bevis $\Rightarrow$: λ_1 og $\bar{v}_1$ er egenværdi og egenvektor for A udvid $\bar{v}_1$ til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$

$B = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, sæt $Q_1 = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$

bemærk Q_1 ortogonal, $Q_1 \bar{e}_1 = \bar{v}_1 \Leftrightarrow Q_1^T \bar{v}_1 = \bar{e}_1$

$Q_1^T A Q_1$ symmetrisk

$$Q_1^T A Q_1 \bar{e}_1 = Q_1^T A \bar{v}_1 = Q_1^T \lambda_1 \bar{v}_1 = \lambda_1 Q_1^T \bar{v}_1 = \lambda \bar{e}_1$$

dvs $Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \bar{0}^T \\ \bar{0} & B \end{bmatrix}$ B $(n-1) \times (n-1)$, symmetrisk

processen gentages på B, dvs. $\exists$ R ortogonal:

$R^T B R = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \bar{0}^T \\ \bar{0} & C \end{bmatrix}$ C $(n-2) \times (n-2)$ symmetrisk

Sæt $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{0} & R \end{bmatrix}$, Q_2 ortogonal, $n \times n$

og $(Q_1 Q_2)^T A Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \bar{0}^T \\ 0 & \lambda_2 & \bar{0}^T \\ \bar{0} & \bar{0} & C \end{bmatrix}$

($Q_1 Q_2$ ortogonal, da produkt af ort. matricer)

Processen fortsætter til resultatet

$$(Q_1 Q_2 \cdots Q_n)^T A \, Q_1 Q_2 \cdots Q_n = \lceil \lambda_1 \; \lambda_2 \; \cdots \; \lambda_n \rfloor$$

Sæt $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_n$, Q ortogonal

$$Q^T A Q = \lceil \lambda_1 \; \cdots \; \lambda_n \rfloor \iff A Q = Q \lceil \lambda_1 \; \cdots \; \lambda_n \rfloor$$

$$\Rightarrow A \bar{q}_j = \lambda_j \bar{q}_j ,$$

dvs. søjlerne i Q udgøres af ortonormerede egenvektorer for A

Sæt $\mathcal{B} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$, den søgte basis

$\Leftarrow$: $\mathcal{B} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \cdots \bar{q}_n)$, $\bar{q}_i \cdot \bar{q}_j = \delta_{ij}$

Sæt $Q = [\bar{q}_1 \; \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_n]$

$Q^T A Q = D$ (diagonal) $\Rightarrow A = Q D Q^T$

$A^T = (Q^T)^T D^T Q^T = Q D Q^T = A$,

dvs. A symmetrisk

eks. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ symmetrisk

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$= 0 \text{ for } \lambda = \begin{cases} 1 & \text{(dobbeltrod)} \\ 10 \end{cases}$$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$(r,s) \neq (0,0)$

$\lambda = 10$: $\begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$t \neq 0$

Bemærk $(1,1,0) \perp (-2,2,1)$ og $(1,0,2) \perp (-2,2,1)$

men $(1,1,0)$ ikke ortogonal på $(1,0,2)$

Gram-Schmidt på $(1,1,0)$, $(1,0,2)$:

$\bar{v}_1 = (1,1,0)$

$\bar{v}_2 = (1,0,2) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$, $\bar{v}_2 := (1,-1,4)$

Ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for A:

$$\mathcal{B} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \tfrac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4),\ \tfrac{1}{3}(-2,2,1) \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ diagonaliserer } A \text{ til } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Opsummering

A $n \times n$, A symmetrisk

Alle egenværdier for A er reelle.

Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er ortogonale.

For hver egenværdi er den geometriske multiplicitet lig med den algebraiske.

Summen af egenværdiernes multiplicitetter er n.

Konklusion

En symmetrisk matrix kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix.

Spektral dekomposition

A symmetrisk, egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

ortonormal basis af egenvektorer $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$

Sæt $Q = [\bar{q}_1 \dots \bar{q}_n]$

$$\begin{aligned} A &= Q \ulcorner \lambda_1 \dots \lambda_n \lrcorner Q^T \\ &= Q [\lambda_1 \bar{e}_1 \dots \lambda_n \bar{e}_n] Q^T \\ &= [\lambda_1 Q\bar{e}_1 \dots \lambda_n Q\bar{e}_n] Q^T \\ &= [\lambda_1 \bar{q}_1 \dots \lambda_n \bar{q}_n] \begin{bmatrix} \bar{q}_1^T \\ \vdots \\ \bar{q}_n^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 \bar{q}_1 \bar{q}_1^T + \dots + \lambda_n \bar{q}_n q_n^T$$

$$= \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

P_j repræsenterer den ortogonale projektion på $\mathrm{Sp}\{\bar{q}_j\}$, idet

$$P_j = \bar{q}_j (\bar{q}_j^T \bar{q}_j)^{-1} \bar{q}_j^T = \bar{q}_j 1^{-1} \bar{q}_j^T = \bar{q}_j \bar{q}_j^T$$

$P_i P_j = O$ for $i \neq j$, rang P_j = rang $q_j = 1$

eks. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ symmetrisk

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -36 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ -36 & 0 & -23-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\left((-2-\lambda)(-23-\lambda) - (-36)^2\right)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda^2+25\lambda-1250) = -(\lambda+50)(\lambda-25)(\lambda+3)$$

$\lambda = -50$: $\begin{bmatrix} 48 & 0 & -36 \\ 0 & 47 & 0 \\ -36 & 0 & 27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$

$\lambda = 25$: $\begin{bmatrix} -27 & 0 & -36 \\ 0 & 28 & 0 \\ -36 & 0 & -48 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$

$\lambda = -3$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & -1316 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$

Spektral dekomposition:

$$A = -50 \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 25 \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -50 \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix} + 25 \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kontrol:

$$-\begin{bmatrix} 18 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$

Kvadratiske former

eks. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

den kvadratiske form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ repræsenteres af den symmetriske matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

Tilsvarende ses

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$
$$= [x \ y \ z] \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Kvadratisk form

$\bar{x}^T A \bar{x}$, $\bar{x} \in R^n$, A $n \times n$ symmetrisk

Q ortogonal matrix, som diagonaliserer A

Indfør basisskift med Q som basisskift-matrix, dvs $\bar{x} = Q\bar{x}_1$. ($\bar{x}_1$ er de nye koordinater.)

$$\bar{x}^T A \bar{x} = (Q\bar{x}_1)^T A Q \bar{x}_1 = \bar{x}_1^T Q^T A Q \bar{x}_1 = \bar{x}_1^T D \bar{x}_1,$$

dvs. den kvadratiske form i de nye koordinater indeholder kun rene kvadratled.

eks $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz$

$$= [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$; substitutionen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$ fører til den

kvadratiske form $x_1^2 + y_1^2 + 10z_1^2$ jf. tidl. eks.

eks. $-2x^2 - 3y^2 - 23z^2 - 72xz = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & -\frac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{25} & \frac{3}{25} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \text{jf. tidl. eks.}$$

$-50x_1^2 + 25y_1^2 - 3z_1^2$ er nu kvadratisk form

geometrisk eks.

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0 \iff [x \ y] \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 15$$

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 12 \\ 12 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = (\lambda - 20)(\lambda + 5) = 0$$

for $\lambda = \begin{cases} 20 \\ -5 \end{cases}$

$$\lambda = 20: \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r \neq 0$$

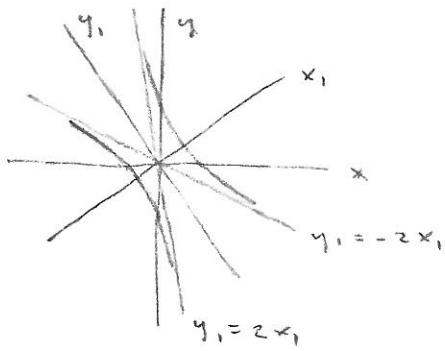
$$\lambda = -5: \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad s \neq 0$$

Substitutionen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ fører til

$$20x_1^2 - 5y_1^2 = 15$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{3}{4}} - \frac{y_1^2}{3} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y_1^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$



hyperbel med centrum i $(0,0)$
og med halvakser $\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sqrt{3}$
asymptoter $y_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} x_1 = \pm 2x_1$
x_1-aksen er drejet vinklen $\arccos \frac{4}{5} \approx 36{,}9°$
i forhold til x-aksen.

geometrisk eks.

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 - 160x - 130y - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 160 & 130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 25$$

$$\begin{vmatrix} 52-\lambda & 36 \\ 36 & 73-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 125\lambda + 2500 = (\lambda - 100)(\lambda - 25)$$

$\lambda = 100$: $\begin{bmatrix} -48 & 36 \\ 36 & -27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$

$\lambda = 25$: $\begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 36 & 48 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$

basisskiftmatrix $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, dvs. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

den kvadratiske form: $100x_1^2 + 25y_1^2$

desuden $\begin{bmatrix} 160 & 130 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 200x_1 - 50y_1$

$$\Rightarrow \quad 100x_1^2 + 25y_1^2 - 200x_1 + 50y_1 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 100(x_1 - 1)^2 + 25(y_1 + 1)^2 = 25 + 100 + 25 = 150$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x_1-1)^2}{\frac{3}{2}} + \frac{(y_1+1)^2}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y_2^2}{6} = 1$$

ellipse med halve storakse $\sqrt{6}$
og halve lilleakse $\frac{\sqrt{6}}{2}$

centrum: $(x_1, y_1) = (1, -1) \sim (x, y) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

x_1-aksen danner vinklen $\arccos \frac{3}{5} \approx 53{,}1°$
i forhold til x-aksen