Vink til opgavesæt 10

3.10 109 (Svar opgave)

$$N = \min\{n \mid X_{(n)} = X_1 ,\ X_{(n-1)} = X_2 , \dots ,$$
$$X_{(k+1)} = X_{n-k} ,\ X_{(k)} = X_n ,\ X_{(k-1)} = X_{n-k+1} , \dots ,$$
$$X_{(2)} = X_{n-2} ,\ X_{(1)} = X_{n-1}\} ,\ k \in \{2, \dots, n\}$$

Mellemresultat : $P(N = n) = \dfrac{n-1}{n!}$

110 $N = \min\{n \mid X_1, \dots, X_{n-1} \le c ,\ X_n > c\}$

Mellemresultat : $N \sim g(1 - F(c))$

112 Bemærk, at $T = \max\{T_1, \dots, T_n\} = T_{(n)}$

Facit : $f_T(t) = n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$

114 Sæt $M = \max\{X, Y\}$

Regn spm. b før spm. a.

Facit til spm. b : $F_M(6) = 0{,}1337$

115 Bemærk, at $X_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)}$, hvor

$$T_k^{(1)} \sim e((n-k+1)\lambda) ,\ k = 1, \dots, n$$

118 Krav : $F_{X_{(4)}}(x) \ge 0{,}9$

Facit : $x \ge 197{,}4$

120 Mellemresultat : $F_T(t) = (1 - e^{-2t})^2$

Facit : $r(t) = \dfrac{4(1 - e^{-2t})}{2 - e^{-2t}} \to 2$ for $u \to \infty$

121 Benyt loven om total sandsynlighed ved udregning af $G_T(t)$.

Mellemresultat : $f_T(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t}$

Facit : $r(t) = \frac{e^t+2}{e^t+1} \to 1$ for $t \to \infty$

122 Lad F betegne den simultane fordelingsfunktion for X_1 og X_2

Mellemresultat :

$$F_{(X_{(1)},X_{(2)})}(x_1,x_2) = F(x_1,x_2) + F(x_2,x_1)$$

124 Lad X_{jl} være indikatorvariabel for hændelsen A_j i det l'te elementarforsøg.

Mellemresultater :

$$E\, I_{jl} = p_j \quad , \quad Var\, I_{jl} = p_j(1-p_j)$$

$$E[I_{jl} I_{km}] = \begin{cases} 0 & \text{for } l=m, \\ p_j p_k & \text{for } l \neq m, \end{cases} \qquad j \neq k$$

$$Cov(I_{jl}, I_{km}) = \begin{cases} -p_j p_k & \text{for } l=m, \\ 0 & \text{for } l \neq m, \end{cases} \qquad j \neq k$$

$$X_j = \sum_{l=1}^{n} I_{jl} \;, \quad EX_j = np_j \;, \quad Var\, X_j = np_j(1-p_j)$$

Facit :

i $Cov[X_j, X_k] = -n p_j p_k \;,\; j \neq k$

ii Flere A_j giver færre A_k'ere , $k \neq j$

iii $\rho(X_j, X_k) = -\sqrt{\dfrac{p_j p_k}{(1-p_j)(1-p_k)}}$

128 Bemærk, at $f_{X+Y}(z) = \int_1^{z-1} f(x) f(z-x)\,dx$

129 –

130 Skriv $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x)\,dx$

131 Benyt opgave 130.

Facit: $f_{X+Y}(z) = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}$, $0 \le z < \infty$