Vink til opgavesæt 11

BR 1 Benyt definitionen på kovariansmatrix, og udnyt, at middelværdioperatoren er lineær.

2 Som opgave 1.

3 Udnyt, at $\operatorname{Var} \underline{X} = \operatorname{Cov}(\underline{X}, \underline{X})$.

6 i Udnyt, at C og C^T kommuterer, jf. kompendium i lineær algebra side 15.

ii Betragt ovenstående i forbindelse med definitionen på invers matrix.

iii Udregn determinanten på begge sider af $C^T C = I$.

iv Udregn $(AB)^T AB$.

7 Husk, at A positiv definit $\Leftrightarrow \forall \underline{x} \neq \underline{0} : \underline{x}^T A \underline{x} > 0$.

Lad C være en ortogonal matrix, som diagonaliserer A. A's egenværdier λ_i, $i = 1, \dots, n$.

Sæt $\underline{y} = C^{-1} \underline{x}$, og vis, at $\underline{x}^T A \underline{x} = \sum_i \lambda_i y_i^2$ (>0).

i Sæt $\underline{y} = \underline{e}_j$, og vis, at $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$

ii Sæt $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, og vis, at $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$.

8 Bemærk, at $C^{-1} A C = \Lambda = \ulcorner \lambda_1 \dots \lambda_n \lrcorner$.

Sæt $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \ulcorner \lambda_1^{\frac{1}{2}} \dots \lambda_n^{\frac{1}{2}} \lrcorner$ og derpå $A^{\frac{1}{2}} = C \Lambda^{\frac{1}{2}} C^{-1}$.

Vis, at $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$.

9 Bemærk, at $\det \Sigma = \det(\Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}})$.

10 Sæt $\underline{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \underline{x} + \underline{\mu}$, og bemærk, at $J(\underline{x}) = \det \Sigma^{\frac{1}{2}}$.

12 Vis, at

i CAC^T er symmetrisk

ii $\forall \underline{x} \neq \underline{0}: \quad \underline{x}^T CAC^T \underline{x} > 0.$

13 Vis, at

i $<\underline{u},\underline{u}> \geq \underline{0}$ for alle $\underline{u}$ og $<\underline{u},\underline{u}> = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$

ii $<\underline{u},\underline{v}> = <\underline{v},\underline{u}>$

iii $<\underline{u},\underline{v}+\underline{w}> = <\underline{u},\underline{v}> + <\underline{u},\underline{w}>$

iv $r<\underline{u},\underline{v}> = <r\underline{u},\underline{v}> = <\underline{u},r\underline{v}>$

14 Husk, at $X_1,\dots,X_n$ uafhængige, $X_i \sim N(0,1)$, $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (χ^2-fordelt med n frihedsgrader).

15 (Svær opgave)

Husk, at $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$.

Angiv $\underline{X}$'s fordeling og dernæst $\underline{U}$'s fordeling.

Udregn U_1 $\left(= \sqrt{n}\,\bar{X} \Rightarrow \bar{X} = \frac{U_1}{\sqrt{n}}\right)$,

og derefter $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ $\left(= U_2^2 + \dots + U_n^2\right)$.

Bemærk, at $\bar{Y}$ og S^2 er uafhængige.

16 Udregn $A \Sigma A^T$, hvor $A = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix}$.