Vink til opgavesæt 12

3.11 132 Husk, at $p_k = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$

Facit: a $p_0 = 1$ b $p_1 = 1$ c $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

135 a Sæt ps uden for summationstegnet.

b Husk formlen $G_{S_n}(s) = \left(G_X(s)\right)^n$

137 Opgaveteksten skal forstås således, at N er uafhængig af X_k for alle k.

Husk formlen $G_{S_N}(s) = (G_N \circ G_X)(s)$ *

Facit: $X_k \sim b(1, \frac{\mu}{\lambda})$, $k = 1, 2, \dots$

138 Lad X være den oparbejdede gæld pr. kaffekøb.

Angiv X's fordeling.

Bemærk, at $Y = 4X$ er heltallig.

Husk formlen $ES_N = EN\,EY$.

140 Lad X_k, $k = 1, \dots, N$, være antal personer pr. bil.

Angiv X_k's fordeling.

Bemærk, at $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

a Bestem først $G_X(s)$ og $G_N(s)$, derefter $G_Y(s)$.

b Husk, at $P(Y = 0) = G_Y(0)$.

c Husk også formlen

$$\operatorname{Var} Y = EN \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} N \,(EX)^2 .$$

* Bemærk, at $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ og $G_{S_N}(s) = e^{\mu(s-1)}$

Bestem $G_X(s)$, så formeludtrykket passer.

142 (Svær opgave)

a Husk, at $F_{M_N}(x) = P(M_N \leq x)$, og benyt loven om total sandsynlighed på det sidste udtryk.

Husk også, at $F_{X_{(n)}}(x) = (F(x))^n$, når $X_1, \ldots, X_n$ er uafh. og identisk fordelte.

b Krav: $F_{M_N}(x) \geq 0{,}9$.

147 a Følg samme fremgangsmåde som ved udledningen af $G_{S_N}(s)$.

Resultatet skrives også $M_{S_N}(t) = (G_N \circ M_X)(t)$.

b Husk, at den momentfrembringende funktion for $X \sim e(\lambda)$ er $\frac{\lambda}{\lambda - t}$, og at den sandsynlighedsfrembringende funktion for $N \sim g(p)$ er $\frac{ps}{1-p-ps}$.

Bemærk, at S_N kan opfattes som tid mellem begivenheder i en udtyndet poissonproces.

c Husk formlerne $EY = G_Y'(1)$ og $EZ = M_Z'(0)$.

149 a Facit: $G_X(s) = G(s,1)$ $G_Y(t) = G(1,t)$

b Facit: $\mathrm{Var}\,X = G_{s^2}(1,1) + G_s(1,1) - (G_s(1,1))^2$

$\mathrm{Var}\,Y = G_{t^2}(1,1) + G_t(1,1) - (G_t(1,1))^2$

$\mathrm{Cov}[X,Y] = G_{st}(1,1) - G_s(1,1)\,G_t(1,1)$

fortsættes

149 fortsat

c i Bemærk, at $G(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s^j t^k p_{jk}$

Ved partiel differentiation j gange mht. s og k gange mht. t får vi i punktet (0,0) $G_{s^j t^k}(0,0) = j!\,k!\,p_{jk}$. Heraf fås p_{jk}.

ii Bevis ⇒): Udnyt, at $E[s^X t^Y] = E[s^X]\,E[t^Y]$

Bevis ⇐: Udnyt udtrykket for $G_{s^j t^k}(0,0)$ samt de tilsvarende udtryk for $G_X^{(j)}(0)$ og $G_Y^{(k)}(0)$.

3.12 150 a Bemærk, at $X \sim p(\frac{10}{13})$

b Bemærk, at $T \sim e(\frac{1}{13})$

c Bemærk, at $Y \sim p(1)$

d Husk, at antal begivenheder i disjunkte tidsintervaller er uafhængige.

151 a Bemærk, at $X \sim p(\frac{2}{7})$

b Benyt en udtyndet poissonproces med $\lambda p = 2\frac{1}{10}$.

Sæt fx en gennemsnitlig måned til 30,44 dg.
(Facitlisten regner med 1 md. = 4 uger.)

Antal ulykker med personskade pr. md:

$Y \sim p(2\frac{1}{10}\,\frac{30{,}44}{7})$

Facit: $P(Y \geq 1) = 0{,}5809$

c Facit: $N \sim b(52, e^{-2})$

154 Se løsningen til opgave 3.5 25 (opg. sæt 7)

Husk $\lambda := \lambda t$.

155 Antal sydgående biler : $X \sim p(2t)$

Antal nordgående biler : $Y \sim p(3t)$

Angiv fordelingen af $X+Y$.

a, b —

c Bemærk, at $Y \mid X+Y=n \sim b(n, \cdot)$,

jf. opg. 154

d Bemærk, at $Z_j \sim U[0;10]$, $j=1,\dots,4$ uafh.

Udregn $\binom{4}{2} P(Z_j \le 5) P(Z_k \le 5)$, $k \neq j$

156 (Svær opgave)

Antal assistancer: $X \sim p(2)$ $\begin{cases} Y : \text{Adams job} \\ Z : \text{Barrys job} \end{cases}$

a Bemærk, at $P(Y=k) = \dfrac{e^{-2}\, 2^{2k-1}}{(2k-1)!}$, $k=1,2,\dots$

b $P(X \le 1)$

c Angiv Z's fordeling.

Ved summation kan benyttes, at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} = \cosh 2 = \frac{e^{2}+e^{-2}}{2}$$

157 (Svær opgave)

$$P(X = k(T)) = \int_0^\infty P(X=k)\, f_T(t)\, dt ,$$

jf. sætn. 3.5.1 (b) s. 170

$$\vdots$$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^k \frac{\lambda}{\mu+\lambda} , \quad k=0,1,\dots$$

Facit : $Y \sim g\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$