Vink til opgavesæt 13

4.2 1 Vis først, at $\operatorname{Var} \bar{X} < \frac{\sigma^2}{n}$.

2 (Svar opgave)
Benyt trekantuligheden, samt at for X og Y ikke-negative gælder $P(X+Y>2x) \leq P(X>x) + P(Y>x)$, jf. mellemresultat i opg. 2.3 9.

3 Benyt store tals lov.

4 Betragt først $H_n^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$, $Y_k = \frac{1}{X_k}$

Bestem Y_k's tæthed ($3y^{-4}$, $1 \leq y < \infty$), og find Y_k's middelværdi ($\frac{3}{2}$), og dermed middelværdien af H_n^{-1}.

Benyt korollar 4.2.3 s. 273 til at bestemme H_n's middelværdi.

5 Husk, at $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$

4.3 8 a Udnyt, at $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $Y_k \sim e(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, u.a.fh.

Facit: $X \sim N(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2})$ app.

b Udnyt, at $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $Y_k \sim p(\frac{\lambda}{n})$, $k = 1, \ldots, n$, u.a.fh.

Facit: $X \sim N(\lambda, \lambda)$ app.

11 Mellemresultat: $X \sim N(3{,}5\,;\ \frac{35}{12n})$ app.

Krav: $P(3 < \bar{X} < 4) > 0{,}99$

13 Udregn først sandsynligheden for rigtigt svar ($\frac{13}{16}$).

Angiv fordelingen af antal rigtige svar

($X \sim N(\frac{325}{4}, \frac{975}{64})$ app.)

fortsættes

13 fortsat

Bemærk $P(\text{bestå}) = P(X \geq 80)$

Facit, når der anvendes kontinuitetskorrektion:

0,6857

15 Udregn først middelværdi og varians for antal biler pr. lyskurve ($\mu = 1{,}2$; $\sigma^2 = 0{,}36$).

Angiv den approksimative fordeling for det totale antal biler ($X \sim N(240, 72)$ appr.)

Krav: $\Phi\left(\frac{x-240}{\sqrt{72}}\right) > 0{,}95$

16 i $E[g(X)] \approx g(\mu)$

ii $E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 g''(\mu)$

Vedr. bogens facit til c:

i $E[X^k] \approx \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\left(= \frac{1}{16} \text{ for } k = 4\right)$

ii $E[X^k] \approx \frac{12 + 2k(k-1)}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\left(= \frac{3}{16} \text{ for } k = 4\right)$

iii Eksakt: $E[X^k] = \frac{1}{k+1}$ $\left(= \frac{1}{5} \text{ for } k = 4\right)$

18 Bestem først $\bar{Y}$'s approksimative fordeling

($\bar{Y} \sim N\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ appr.)

Bemærk, at $H_n = \bar{Y}^{-1}$

Benyt sætn. 4.3.2 s. 280 til at bestemme H_n's approksimative fordeling.

<u>4.4</u> 20 Vis, at $F_{\frac{1}{n}X_n}(x) \to x$ $(= F_X(x))$ for $n \to \infty$, $0 \leq x \leq 1$

(Bemærk, at $\frac{[nx]}{n} \to x$ for $n \to \infty$; $[nx]$ betyder den hele del af nx.)

21 Mellemresultat :

$$F_{\frac{1}{n}X_n}(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{[nx]}\right)$$

Sæt $[xn] = m$, hvorefter $\frac{1}{n} \simeq \frac{x}{m}$

Mellemresultat :

$$F_{\frac{1}{n}X_n}(x) \approx \left(1-\frac{x}{m}\right)\left(1-\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m}\right)$$

Husk, at $\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \to e^{-x}$ for $m \to \infty$

22 Husk, at $F_{X_{(n)}}(x) = \left(F_X(x)\right)^n$.

24 Mellemresultat :

$$F_{Y_n}(y) \to 1 - e^{-y^2} \quad \text{for } n \to \infty \, , \quad 0 \le y < \infty$$

25 Mellemresultat :

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \left(1 - \frac{y^3}{a_n^3}\right)^n \, , \quad 0 \le y < \infty$$