Vink til opgavesæt 14

5.3

1 jf. opg. 2.4 24 a

2 jf. opg. 2.4 24 b

3 (svær opgave)

$Y \sim p(\lambda)$ kan opfattes som antal begivenheder i tidsintervallet $[0;\lambda]$ i en poissonproces med intensitet 1.

Bemærk, at $Y = \min\{n \mid S_{n+1} > \lambda\}$.

Facit: $Y = \min\{n \mid -\sum_{k=1}^{n} \ln U_k > \lambda\} - 1$,

$U_k \sim U[0;1]$, $k = 1, \dots, n$, uafh.

4 Antal begivenheder i tidsintervallet $[0;t]$ kan fastlægges ved simulering af $N \sim p(\lambda t)$, jf. opg. 3 med $\lambda := \lambda t$.

Begivenhedernes placering i $[0;t]$ kan fastlægges i henhold til 'order statistic property', se side 249-50.

5 (svær opgave)

Husk, at $X = \sum_{j=1}^{r} Y_j$, $Y_j \sim g(p)$, $j = 1, \dots, r$, uafh.

Bemærk, at $P(Y_j = k) = P(Y_j > k-1) - P(Y_j > k)$.

$Y_j = k$, når $\underbrace{(1-p)^k < u < (1-p)^{k-1}}_{\text{omformes til } \dots < k < \dots}$, $u \sim U[0;1]$

Mellemresultat:

$$Y_j = \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right] + 1 , \quad U \sim U[0;1]$$

Facit:

$$X = \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\ln U_j}{\ln(1-p)}\right] + r , \quad U_j \sim U[0,1],$$
$j = 1, \dots, r$, uafh.

5.4 7 Bestem X's fordelingsfunktion, og benyt derefter invers transformations metoden.

8 a X's tæthedsfunktion er $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < \infty$

9 X's fordelingsfunktion er $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}}$, $0 < x < \infty$.

11 Facit:

$$X = \begin{cases} 0 & , \text{ når } 0{,}8 < u \leq 1 \\ -\ln \frac{5u}{4} & , \text{ når } 0 < u \leq 0{,}8 \end{cases} , \quad U \sim U[0;1]$$

13 Mellemresultat:

$$\ln X = \ln(-\ln U) \,, \quad U \sim U[0;1]$$

Benyt store tals lov til approksimativ bestemmelse af $E[\ln X]$

14 Vis, at $E[\sin X] = 0$, og dermed at simulering bortfalder.

15 Benyt store tals lov på indikatorvariable for hændelsen $X+Y+Z \leq 2{,}5$.

16 Jf. opg. 4.2 3.

17 Benyt transformationen

$$X_1 = \sigma_1 X + \mu_1$$

$$Y_1 | x_1 = \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, Y + \mu_{Y|x_1}$$

Facit:

$$(X_1, Y_1) = (\sigma_1 X + \mu_1 , \sigma_2(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}\, Y) + \mu_2)$$

18 Bemærk, at $f(r,\theta) = \frac{1}{\pi}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta < 2\pi$

Mellemresultater:

$f_R(r) = 2r$, $0 \le r \le 1$ $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$F_R(r) = r^2$, $0 \le r \le 1$ $\Theta \sim \mathcal{U}[0;2\pi]$

Bemærk, at X og Y er ukorrellerede, men ikke uafhængige.

19 Vælg fx $Y \sim \Gamma(3,1)$, $g(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}$, som reference.

Mellemresultater:

$$\frac{f(y)}{c\,g(y)} = \frac{1}{c} \frac{8e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-\frac{1}{2})^2} < 1 \text{ for } c = \frac{8e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \simeq 5{,}80$$

$$Y = -\sum_{k=1}^{3} \ln V_k, \quad V_k \sim \mathcal{U}[0;1], \quad k = 1,2,3 \text{ uafh.}$$

Facit:

$X = y$, når $u < e^{-(y-\frac{1}{2})^2}$, $U \sim [0;1]$, U og Y uafh.,

ellers afvis