Vink til opgavesat 16

7.2 4 c Rækkeoperationer

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & -0,8 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3,6 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mellemresultat : $\underline{\pi} = \left(\frac{18}{29}, \frac{6}{29}, \frac{5}{29} \right)$

Husk formlen $E_i[\tau_i] = \frac{1}{\pi_i}$

5 i Vis, at

$$P(Y_{n+1} = (j,k) \mid Y_0 = (i_0, i_1), Y_1 = (i_1, i_2), \dots, Y_{n-1} = (i_{n-1}, i), Y_n = (i,j))$$
$$= P(Y_{n+1} = (j,k) \mid Y_n = (i,j)).$$

ii Mellemresultat : $p_{(i,j),(j,k)} = p_{jk}$

$p_{(i,j),(m,k)} = 0$ for $m \neq j$

Facit : $P_Y = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{bmatrix}$

iii Rækkeoperationer

$$P_Y^T - I = \begin{bmatrix} -p & 0 & 1-p & 0 \\ p & -1 & p & 0 \\ 0 & q & -1 & q \\ 0 & 1-q & 0 & -q \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} p & 0 & -(1-p) & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Facit : $\underline{\pi} = \left(\frac{q(1-p)}{p+q}, \frac{pq}{p+q}, \frac{pq}{p+q}, \frac{p(1-q)}{p+q} \right)$

8 Bemærk, at P er dobbelt stokastisk, idet

$$\sum_j p_{ij} = \sum_i p_{ij} = 1$$

Facit : $\underline{\pi} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$

11 a i Optegn overgangsdiagrammet

Facit: $P = \begin{bmatrix} 0{,}16 & 0{,}64 & 0{,}18 & 0{,}02 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}18 & 0{,}02 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii Rækkeoperationer

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0{,}84 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}64 & -0{,}6 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}18 & 0{,}18 & -1 & 1 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}48 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}496 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}0496 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Facit: $\underline{\pi} = (0{,}3305\ ;\ 0{,}4892\ ;\ 0{,}1639\ ;\ 0{,}0164)$

b Husk formlen $E_i[N_j] = \dfrac{\pi_j}{\pi_i}$.

c –

12 Hvis et par må gå igen, fordi der ikke er plads til dem begge i køen, så tæller ankomsten ikke med som begivenhed.

Angiv tilstandsrummet.

a Bemærk, at $\dfrac{p_{34}}{p_{32}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}$.

Mellemresultat: $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rækkeoperationer:

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -48 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b, c –

13 (svær opgave)

Vis først, at $\forall j: P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} P(X_n = i)$,

og lad derefter $n \to \infty$.

14 Angiv overgangsmatricen.

a, b –

c Rækkeoperationer:

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15 Fra eks. 7.2.16 : $\pi_k = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, \dots$

a, b –

16 Optegn overgangsdiagrammet og angiv overgangsmatricen.

Rækkeoperationer:

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Facit: i Markovkæden er ergodisk
(irreducibel, aperiodisk, pos. rekurrent)

ii Grænsefordelingen eksisterer
(lig med den stationære fordeling)

SLB 5.7 –

8.4 –