Vink til opgavesæt 17

<u>7.3</u> 22 Mellemresultater: $EX_k = 0$

$\operatorname{Var} X_k = 1$

Udregn ES_n, $\operatorname{Var} S_n$, ES_{n+m}, $\operatorname{Var} S_{n+m}$ samt $\operatorname{Cov}[S_n, S_{n+m}]$ og $\rho(S_n, S_{n+m})$.

Bemærk, at $\operatorname{Cov}[S_n, S_{n+m}] = \operatorname{Cov}[S_n, S_n + \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k]$.

Det ses, at $\rho \to 0$ for $m \to \infty$ og n fast,

og $\rho \to 1$ for $n \to \infty$ og m fast.

23 Bemærk, at $ES_n = n(2p-1)$.

24 a Optegn overgangsdiagrammet.

i Markovkæden er ergodisk.

Giv begrundelse.

ii Angiv overgangsmatricen P.

Bemærk, at P er symmetrisk.

Vi kan derfor benytte resultatet i opg. <u>7.2</u> 8 til direkte at angive den stationære fordeling $\underline{\pi}$.

Alternativt: Løs ligningssystemet $\underline{\pi} = P\underline{\pi}$.

iii Den stationære fordeling er også grænsefordeling.

b Husk formlen $E_i[\tau_i] = \frac{1}{\pi_i}$.

c Optegn overgangsdiagrammet.

fortsættes

24 c fortsat

i Kæden er periodisk med perioden 2.

ii Rækkeoperationer:

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii Den stationære fordeling er ikke grænsefordeling.

25 Optegn overgangsdiagrammet.

i Sæt fx $P_0(\tau_1 < \infty) = u$.

Opstil ved benyttelse af betingning en ligning til bestemmelse af u.

ii Sæt fx $E_0[\tau_1] = \mu$.

Opstil ved benyttelse af betingning en ligning til bestemmelse af μ.

26 Bemærk, at $E_0[\tau_r] = r\,E_0[\tau_1]$

27 Bemærk, at

$$P_0(\tau_0 < \infty) = P_1(\tau_0 < \infty)\,p + P_{-1}(\tau_0 < \infty)\,(1-p)$$

31 a Mellemresultat: $EX = 2$

b Mellemresultater: $G(s) = \dfrac{1}{3-2s}$

$$G_2(s) = \frac{3-2s}{7-6s}$$

fortsættes

31 fortsat

c Husk, at q er mindste løsning til $G(s) = s$.

32 Bemærk, at $Z_0 = Y_0 \neq 0$, $Z_1 = Y_1 + \sum_{k=1}^{Z_0} X_k, \ldots, Z_n = Y_n + \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k$.

a Mellemresultat: $G_{Z_1}(s) = H(s)\,(H \circ G)(s)$

b Mellemresultat:

$$G_{Z_n}(s) = \prod_{j=0}^{n} (H \circ G_{n-j})(s) = \prod_{j=0}^{n} (H \circ G_j)(s), \qquad G_0(s) = s$$

Husk, at $E[Z_n] = G_{Z_n}'(1)$.

Facit: $E[Z_n] = \nu \dfrac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}$

c Bemærk, at $X \sim b(1,p)$ og $Y_k \sim p(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, alle uafh.

Mellemresultater: $G^{\circ j}(s) = 1 - p^j + p^j s$

$H(s) = G_{Y_k}(s) = e^{\lambda(s-1)}$

Husk, at $G_j(s) = G^{\circ j}(s)$.

SLB 9.3 Husk, at $f_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{00}^{(n)}$.

Benyt formlen $ET = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n)$ ved bestemmelsen af μ_{00}.

9.4 Optegn overgangsdiagrammet.

Rækkeoperationer:

$$P^T - I = \begin{bmatrix} u_0 - 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ u_1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ u_2 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ u_3 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\sum_{j=1}^{\infty} u_j & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \sum_{j=2}^{\infty} u_j & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \sum_{j=3}^{\infty} u_j & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$