Vink til opgavesæt 19

7.4 33 Facit : En nulrække.

34 i –

ii Bemærk, at $P_t' = P_t G \iff P_t'^T = G^T P_t^T$

Den transponerede udgave kan opfattes som to sæt sammenhørende første ordens differentialligninger, jf. løsning af $\underline{x}' = A\underline{x}$ (se fx Spence, Insel, Friedberg s. 339-344).

Mellemresultater:

Egenværdier (benævnt α) og tilhørende egenvektorer for matricen G^T

$$\alpha = 0, \quad \underline{v} = r(\mu, \lambda), \quad r \neq 0$$
$$\alpha = -(\lambda+\mu), \quad \underline{v} = s(1,-1), \quad s \neq 0$$

Foreløbig løsning:

$$S^{-1} P_t^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 e^{-(\lambda+\mu)t} & c_4 e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}, \text{ idet}$$

$$S^{-1} P_t^T S = D = \begin{bmatrix} 0 & \\ & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix} \text{ med } S = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & -1 \end{bmatrix}.$$

Begyndelsesbetingelsen $P_0^T = I$ fører til bestemmelse af c_1, c_2, c_3 og c_4.

Facit (efter tilbagetransponering):

$$P_t = \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{bmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda(1-e^{-(\lambda+\mu)t}) \\ \mu(1-e^{-(\lambda+\mu)t}) & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

(I denne opgave ville det være lidt simplere at benytte de bagudrettede ligninger, idet der i så fald ikke skulle transponeres.)

iii –

35 a Lad $Y_{(1)}$ betegne det tidspunkt, hvor en fugl forlader foderbrættet.

Angiv fordelingen af $Y_{(1)}$ (afhænger af den tilstand, processen er i).

b —

c En ændring er ankomst af en fugl, eller at en fugl forlader brættet.

d Betragt $\xleftarrow{4} (4) \xrightarrow{1}$, og udregn $P(X < Y_{(1)})$, hvor X betegner tiden til ankomst af en fugl.

36 Antag, at $p_{ii} > 0$, og lad N være det antal gange, at processen successivt befinder sig i tilst. i. Angiv fordelingen af N. ($N \sim g(\cdot)$)

Sæt $p_{ii} := 0$, og juster λ_i og p_{ij}, $j \neq i$, således at processen forbliver uændret samtidig med, at vi opnår den sædvanlige beskrivelse.

37 a —

b Rækkeoperationer

$$G^T = \begin{bmatrix} -a & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -b & \frac{1}{2}b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b & -b & \frac{1}{2}b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}b & -b & \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}b & -b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}b & -a \end{bmatrix}$$

fortsættes

37 b fortsat

$$\sim \begin{bmatrix} -2a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Facit : i $\underline{\pi} = \dfrac{1}{2b + 2a(m-1)} (b, 2a, \ldots, 2a, b)$

ii $\underline{\pi} = \dfrac{1}{m+1} (1, \ldots, 1)$ for $b = 2a$

iii $\underline{\pi}$ i opg. $\underline{7.3}$ 24 c er <u>ikke</u> en ligefordeling

38 a Vis, at $\left(\dfrac{1}{\sum_j v_j} \underline{v} \right) P = \dfrac{1}{\sum_j v_j} \underline{v}$

b i Vis, at $\forall j : \sum_i \gamma_{ij} \dfrac{c v_i}{\lambda_i} = 0$

ii Udled, at $c = \dfrac{1}{\sum_j \frac{v_j}{\lambda_j}}$

c Vis, at $\underline{1}\, P = \underline{1}$

d Vis, at den stationære fordeling for $\{X_t\}$ er

$$\pi_0 = \frac{3}{3+\pi^2}, \quad \pi_k = \frac{3}{(3+\pi^2)k^2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

og afgør, om $\{X_t\}$ er pos./nulrekurrent.
Benyt sætn. 7.3.1 side 430 til at afgøre, om $\{X_n\}$ er pos./nulrekurrent.

39 Facit : $\lambda_k > \left(\frac{1}{2}\right)^k$