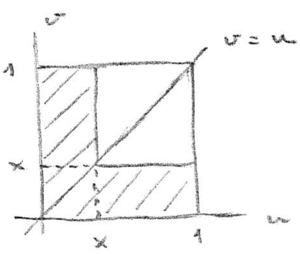
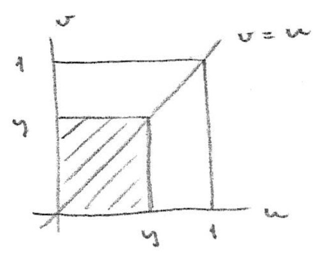
Vink til opgavesæt 9

3.8 85 Bestemmelse af fordelingsfunktionerne $F_X(x)$ og $F_Y(y)$:

i. Geometrisk bestemmelse:



$F_X(x)$ ~ skraveret areal (hvorfor?)



$F_Y(y)$ ~ skraveret areal (hvorfor?)

ii. Direkte udregning:

$F_X(x) = P(U \le x) + P(V \le x) - P(U \le x, V \le x) = \ldots$

$F_Y(y) = P(U \le y, V \le y) = \ldots$

Mellemresultater:

$F_X(x) = 2x - x^2$, $0 \le x \le 1$

$F_Y(y) = y^2$, $0 \le y \le 1$

Bestemmelse af tæthedsfunktionerne $f_X(x)$ og $f_Y(y)$:

i. Ved differentiation af $F_X(x)$ og $F_Y(y)$.

ii. Som tæthedsfunktioner for ordensvariable (kræver ikke forudgående bestemmelse af F_X og F_Y):

$f_X(x) = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{2-1}$ (hvorfor?)

$f_Y(y) = 2 \cdot 1 \cdot y^{2-1}$ (hvorfor?)

Bestemmelse af middelværdierne EX og EY:

i Udregning i henhold til definitionen:

$EX = \int_0^1 x f_X(x)\,dx$, analogt EY

fortsættes

85 fortsat

ii Udregning : henhold til formlen

$$EX = \int_0^1 P(X>x)\,dx \quad , \quad \text{analogt } EY$$

(kræver ikke forudgående bestemmelse af f_X og f_Y)

Mellemresultater :

$$EX = \frac{1}{3} \quad , \quad EY = \frac{2}{3}$$

Bestemmelse af kovariansen $Cov(X,Y)$:

Bemærk, at $E[XY] = E[UV]$

86 $X = \sum_{k=1}^{n} I_n$, $EX = 1$ jf. eks. 3.6.10 s. 184 - 185

Mellemresultater :

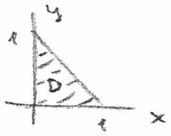
$$Var\, I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

$$E[I_j I_k] = P(I_j = 1, I_k = 1) = \ldots = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$Cov[I_j, I_k] = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

Husk, at $Var\, X = \sum_{k=1}^{n} Var\, I_k + 2 \sum_{j<k} Cov[I_j, I_k]$

92



$(X,Y) \sim U[D]$

a Mellemresultater :

$$f(x,y) = 2 , \quad (x,y) \in D \quad , \quad EX = \frac{1}{3} \quad , \quad EX^2 = \frac{1}{6}$$

$$Var\, X = Var\, Y = \frac{1}{18} \quad , \quad Cov[X,Y] = -\frac{1}{36}$$

Facit : $\rho(X,Y) = -\frac{1}{2}$

b Overvej områdets form.

97 Mellemresultater : $E[ST] = E[X^2]\,EY + EX\,E[Y^2]$

$Cov[S,T] = \sigma^2 (EX + EY)$

98 Mellemresultater :

$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 1, \qquad f_{Y|x}(y) = \frac{1}{x^2} \qquad 0 \le y \le x^2$

$E[Y|x] = \frac{x^2}{2}$

$EX = \frac{3}{4}, \quad E[X^2] = \frac{3}{5}, \quad Var\,X = \frac{3}{80}, \quad EY = \frac{3}{10}$

$E[XY] = \frac{1}{4}, \quad Cov[X,Y] = \frac{1}{40}$

$\frac{Cov[X,Y]}{Var\,X} = \frac{2}{3}, \quad \ell(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$

101 a i -

ii $\rho(X_i, \bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \rho^2 = \frac{1}{n}$

b -

<u>3.9</u> 103 a Husk, at $E[Y|x] = EY + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - EX)$

b Bemærk, at $E[A|x] = x\,E[Y|x]$

c Bemærk, at $29 < C < 31 \iff |C - 30| \le 1$

Mellemresultat : $C \sim N(30;\ 0{,}328)$

d Mellemresultater : $C|x = 2\,Y|x + 10{,}2$

$C|x \sim N(30{,}52;\ 0{,}24^2)$

Bemærk, at $29 < C|x < 31 \iff -1{,}52 < C|x - \mu < 0{,}48$

e Bemærk, at $C \sim N(30;\ 0{,}328\,c)$

Betingelse : $2\,\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}328c}}\right) - 1 > 1 - 0{,}01$

105 Mellemresultater:

a $X - Y \sim N(-2, 2)$

b $Y - 2X \sim N(-3, 5)$

c $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(-2, \frac{2}{n})$

107 Simultan tæthed for (X, Y):

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + 2xy + y^2)\right)$$

Simultan tæthed for (U, V):

$$f_{(U,V)}(u,v) = f\left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u-v)\right) \left|-\tfrac{1}{2}\right|$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(1-\rho)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1+\rho)}} \exp\left(-\frac{v^2}{4(1+\rho)}\right)$$

108 a Bemærk, at $Z \sim N(900, \frac{181}{4})$

b Bemærk, at I er indikatorvariabel for valg af type 1.

Benyt loven om total sandsynlighed ved bestemmelse af $F_W(w) = P(W \leq w)$.

c Mellemresultat: $E[W^2] = 820.090{,}5$