Søren F. Kiær

Endelige Markov-kæder

- en elementær indføring i stokastiske processer

Kapitel 1: Indledende eksempler

Formål: Formålet med dette kapitel er at give en fornemmelse for de begreber og problemstillinger bogen senere skal behandle, før de præcise definitioner og sætninger kendes. Det er ikke nødvendigt at sætte sig ind i alle eksempler, og det er heller ikke meningen, at man skal kunne besvare alle spørgsmål i detaljer. De mindre banale spørgsmål i dette kapitel skal først og fremmest appellere til læserens fantasi. Senere i bogen bliver alle eksempler taget op pány, efterhånden som det nødvendige teoretiske fundament udvikles.

Eksempel 1.1

Provinsbyen X-købing har tre konkurrerende dagblade, som vi kan kalde A, B og C. Om markedsforholdene gøres følgende forudsætninger:

Abonnementsskaren er konstant, d.v.s., avislæserne holder ikke op med at læse avis, og der kommer ikke nye abonnenter til. Læserne har derimod mulighed for at skifte til en ny avis ved hvert månedsskift. I den sammenhæng oplyses følgende:
Af A´s abonnenter vil 5% skifte til B og 10% til C ved hvert månedskift. De tilsvarende tal for avisen B er: 15% går til C og 8% til A. Endelig vil 5% gå fra avisen C til avisen B, og 6% vil skifte fra C til A ved hvert månedskift.

På grundlag af disse oplysninger vil vi forsøge at udtale os om ændringerne i markedsforholdene, set over en periode af flere måneder.

* Forsøg at få et overblik over ovenstående oplysninger ved at tegne et diagram med pile mellem de tre aviser, som angiver hvorledes abonnementsskaren bevæger sig ved hvert månedskift.
* Familien Hansen er pr. 1/8 abonnent på avisen A. Hvad er sandsynligheden for, at familien 2 måneder senere, d.v.s. den 1/10, abonnerer på A? på B? på C?
* Hvad er sandsynligheden for, at familien Hansen ikke abonnerer på avisen A i månederne september, oktober og november?

* Lad os antage, at aviserne den 1/8 havde delt markedet mellem sig på følgende måde:

  75% læste A, 15% læste B, medens 10% abonnerede på C.

Hvorledes var markedsandelene 1 måned senere, den 1/9?

* Hvordan ser forholdene ud efter 2 måneder, den 1/10?
* Er der tendens til monopoldannelse på avismarkedet i X-købing?
* Gentag forrige spørgsmål hvis fordelingen den 1/8 er:

  60% til avisen A, 20% til B og 20% til C ▽

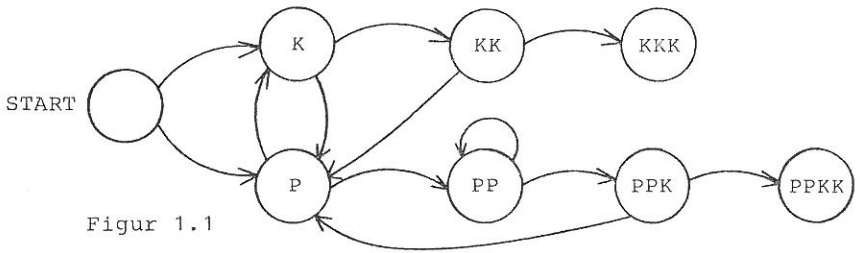
Eksempel 1.2

En symmetrisk mønt, som enten kan vise P (plat) eller K (krone), kastes, indtil vi har fået krone 3 gange i træk *eller* 2 plat efterfulgt af 2 krone, d.v.s., indtil vi har opnået mønstret KKK eller mønstret PPKK.

Enhver kan foretage dette eksperiment, men det kan vare længe, før man er færdig - teoretisk set kan man blive ved med at kaste i det uendelige. Dette er dog en rent "teoretisk" mulighed, idet det senere skal vises (i kapitel 4), at sandsynligheden er 0 for at kaste mønten uendelig mange gange (hvilket ikke modsiger, at situationen rent logisk kan indtræffe). Derfor vil eksperimentet med sandsynligheden 1 stoppe efter endelig mange kast enten med mønstret KKK eller med PPKK.

Det kunne derfor være interessant at *bestemme sandsynligheden for, at eksperimentet stopper med mønstret KKK.* Anderledes udtrykt ønsker vi at bestemme sandsynligheden for, at man får KKK *før* PPKK ved kast med en symmetrisk mønt.

Umiddelbart er denne opgave meget vanskelig at løse. Følgende graf kan måske give et overblik over opgaven:



Figur 1.1

Eksperimentet begynder i START. Antag, at vi efter en række kast med mønten er havnet i tilstanden PP. Det kan f.eks. være sket ved følgende serie: KKPKPKPP. Kastes mønten endnu engang, foreligger to muligheder:

a) Hvis mønten viser P, bliver vi i PP.

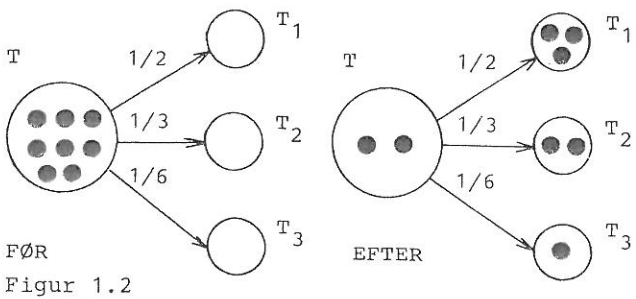
b) Viser mønten K, havner vi i tilstanden PPK.

Til begge muligheder knyttes sandsynligheden ½. Såsnart tilstanden KKK eller PPKK nås, stoppes processen. Figuren viser, at eksempel 1.2 har mange lighedspunkter med eksempel 1.1, blot med den forskel at eksempel 1.2 har to tilstande, som stopper processen. Den slags tilstande kaldes for *absorberende* tilstande.

Vi er imidlertid ikke kommet den ønskede sandsynlighed nærmere. For at få et begreb om sandsynligheden for at stoppe i KKK, kunne man simulere eksperimentet ved at føre det til ende f.eks. 20 gange, og opgøre hvor mange gange eksperimentet sluttede med KKK. Herved kunne vi få en ide om sandsynligheden for at slutte i tilstanden KKK, men der er kun tale om en tilnærmelse, idet to personer, som uafhængigt af hinanden gennemfører simulationen, vil komme til to forskellige sandsynligheder.

Den nøjagtige værdi af sandsynligheden for at eksperimentet stopper i KKK, fås som resultat af et snedigt spil, som vi nu vil beskrive:

Betragt situationen i figur 1.2. Hvis man fra tilstanden T kan overgå til T_1, T_2 og T_3 med sandsynlighederne henholdsvis 1/2, 1/3 og 1/6, så siger spillets regler, at kugler kan flyttes fra T over i T_1, T_2 og T_3 i et forhold nøjagtigt svarende til forholdet mellem sandsynlighederne. Forholdet 1/2:1/3:1/6 er lig med forholdet 3:2:1, d.v.s., i figur 1.2 kan 6 kugler flyttes fra T, medens 2 kugler efterlades i T. T må altså rumme mindst 6 kugler, hvis det skal være muligt at flytte kugler fra T.



Figur 1.2

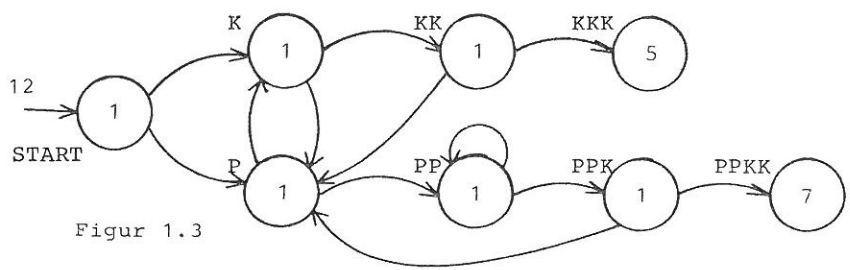
Dette minimale tal, som er nødvendigt for at kunne trække fra T, kaldes for *enhedsladningen* hørende til T, og enhedsladningen minus 1 kaldes for T´s *kritiske ladning*. I figur 1.2 har T altså den kritiske ladning 5.Specielt defineres, at en absorberende tilstand har enhedsladningen 1 (dette gælder f.eks. tilstandene KKK og PPKK fra figur 1.1). Det træk, som vi her har beskrevet, er den væsentligste regel fra spillet.

Spillet *startes* ved, at alle tilstande fyldes op til den kritiske ladning. Dernæst fyldes START op til enhedsladningen. Nu er det muligt at flytte kugler fra tilstanden START, og dette giver måske anledning til andre træk rundt omkring. Man bliver ved, indtil det er umuligt at foretage flere træk.

Spillet er *slut*, hvis trækfølgen er stoppet, fordi alle tilstande, pånær de absorberende og tilstanden START , er kritisk ladede. I modsat fald fyldes tilstanden START igen op til enhedsladningen, og trækkene fortsættes. Spillet vil slutte efter endelig mange træk.

Dette var den generelle beskrivelse af spillet. Lad os prøve spillet på figur 1.1. Her har alle tilstande, pånær de to absorberende, enhedsladningen 2.

* Gennemfør spillet med udgangspunkt i figur 1.1. Vis, at man ender med følgende situation:



Figur 1.3

Der gælder nu følgende regel, som bliver bevist i kapitel 4:

R1. Sandsynligheden for at stoppe i en absorberende tilstand A =

$$\frac{\text{antal kugler i A}}{\text{samlede antal kugler i alle de absorberende tilstande}}$$

Anvendes dette på figur 1.3, får man:

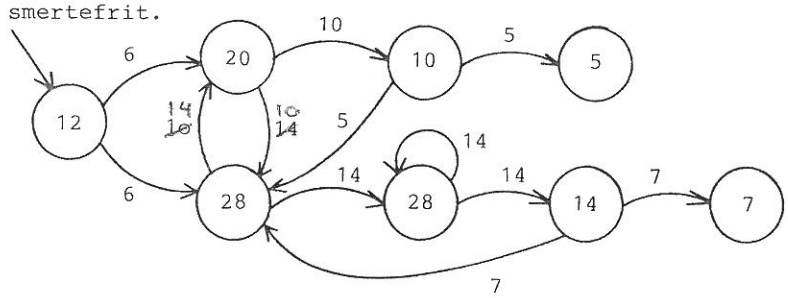
Sandsynligheden for at processen stopper i KKK $= \frac{5}{12}$,

Sandsynligheden for at processen stopper i PPKK $= \frac{7}{12}$.

Vi har faktisk hermed løst den opgave, der oprindelig blev stillet, men det er muligt at beregne andre interessante størrelser. F.eks. kan man spørge:

Hvor mange møntkast behøves i gennemsnit, før processen stopper?

Denne gennemsnitsværdi er overordentlig vanskelig at beregne direkte, men ved at anvende en ny regel på figur 1.4 går det helt smertefrit.



Figur 1.4

Tallene i figur 1.4 angiver det antal kugler, som har passeret et givet punkt af grafen under spillets afvikling. Det er ikke noget vi har ført regnskab med undervejs. Man kan nemlig regne "baglæns" med udgangspunkt i figur 1.3 på følgende måde: Vi sluttede med 7 kugler i PPKK. Disse kugler er ankommet via pilen mellem PPK og PPKK, altså har 7 kugler passeret denne pil. Da vi hele tiden lader lige mange kugler følge pilen PPK-PPKK og pilen PPK-P, må 7 kugler have passeret pilen PPK-P. Heraf sluttes, at ialt 14 kugler har passeret tilstanden PPK.

Spillet er først afsluttet, efter den oprindelige fordeling af kuglerne er dukket op igen. Derfor må det for en vilkårlig, ikke-absorberende tilstand T gælde at:

Antallet af kugler, som forlader T = Antallet af kugler, som ankommer til T.

Denne konstatering viser, at 14 kugler er ankommet til PPK. Det kan kun ske via pilen PP-PPK, som derfor også er passeret af 14 kugler.

* Kontroller, at resten af figur 1.4 er korrekt udfyldt.

Herefter kan vi, igen uden bevis, præsentere en ny regel, som kan løse vort problem:

R2. Det gennemsnitlige antal skridt indtil processen stopper =

samlede antal kugler i alle ikke-absorberende tilstande

~~antal kugler i tilstanden START~~ *

Anvendt på figur 1.4 finder man, at mønten i gennemsnit skal kastes

$$\frac{12 + 20 + 10 + 28 + 28 + 14}{12} = \frac{112}{12} = 9.333...$$

gange, før processen stopper ▽

Eksempel 1.3

Eksempel 3.a. Peter og Poul spiller et spil. Taberen af hvert spil betaler 1 krone til vinderen. Peter vinder spillet med sandsynligheden 2/3, medens Poul har sandsynligheden 1/3 for at vinde. Peter ejer til at begynde med 1 krone, medens Poul ved kampens begyndelse har 3 kroner. Når een af spillerne efter et antal spil er blevet ruineret, stopper kampen.

* Tegn grafen for dette spil, idet Peters formue bruges som udgangspunkt.
* Der bliver to absorberende tilstande. Hvilke?
* Anvend reglerne R1 og R2 fra eksempel 1.2 til at beregne sandsynligheden for, at processen stopper i hver af de absorberende tilstande.
* Hvorlænge varer spillet i gennemsnit?

Eksempel 3.b. Samme kamp som i eksempel 3.a. Forskellen er blot, at hvis een af deltagerne vinder hele puljen, så forærer han den ruinerede part 1 krone, hvorefter spillet kan fortsætte.

* Tegn igen grafen for spillet, set udfra Peters synsvinkel.
* Kan metoderne fra eksempel 1.2 anvendes her?

Eksempel 3.c. Samme spil som i 3.a. Hvis Peter vinder hele beløbet på 4 kroner, giver han 1 krone til Poul, og der fortsættes. Spillet stoppes derimod, hvis det er Poul, som vinder hele puljen.

* Tegn igen grafen for spillet, med Peters formue som udgangspunkt.
* Hvad er sandsynligheden for, at spillet slutter med Pouls endelige sejr?
* Hvorlænge varer spillet i gennemsnit?

* samlede antal kugler i de absorberende tilstande

Eksempel 4.c. Dette eksempel er hentet fra *populationsgenetikken*. Vi betragter en population, hvis størrelse holdes konstant lig n, og hvor populationen formerer sig ved tilfældig parring. Modellen har til formål at studere et bestemt gen, som forekommer i to former, A og a. Vi ønsker nærmere bestemt, at undersøge hvorledes *antallet* af A-forekomster ændres, efterhånden som generationerne dannes.

Da populationen består af n individer, og dermed ialt har 2n genforekomster, vil antallet af A-forekomster og antallet af a-forekomster altid være et helt tal mellem 0 og 2n. Indeholder en generation specielt 2n A-forekomster, vil det samme gælde for alle fremtidige generationer. Tilsvarende, såfremt en generation har 0 A-forekomster. Disse ydersituationer benævnes derfor *rene* tilstande.

Antag, at en bestemt generation indeholder j A-forekomster (og dermed 2n-j a-forekomster). Vi vil da udregne sandsynlighedsfordelingen for antallet af A-forekomster i den næste generation. P.g.a. den tilfældige parring, kan man ud fra et matematisk synspunkt anskue dannelsen af de n individer i næste generation på følgende måde:

Ved parringen dannes et stort antal genforekomster. Af disse udgør A-formen brøkdelen j/2n og a-formen udgør brøkdelen 1-j/2n. Udvælgelsen af næste generation sker ved 2n gange at udvælge en genforekomst. Sandsynligheden for at det er en A-forekomst, man får fat i, er j/2n, medens sandsynligheden for en a-forekomst er 1-j/2n. I flg. binomialformlen er sandsynligheden for, at den nye generation har k A-forekomster lig med:

$$p_{jk} = \binom{2n}{k}\left(\frac{j}{2n}\right)^k\left(1 - \frac{j}{2n}\right)^{2n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,2n.$$

I kapitel 4 vises, at uanset hvorledes antallet af A-forekomster er ved processens start, så vil processen bevæge sig hen mod een af de rene tilstande, d.v.s., efter endelig mange generationer har populationen udelukkende A-forekomster eller udelukkende a-forekomster, et resultat som måske virker overraskende på dem, som kender Hardy-Weinbergs sætning.

Modellen blev iøvrigt udviklet af en engelsk statistiker, R.A. Fisher, og han brugte den til at studere marker med et fast antal planter ▽

Opgaver til kapitel 1

Opgaverne 1 - 5 knytter sig til eksempel 2.

Opgave 1. Giv en intuitiv begrundelse for rigtigheden af R1. Benyt hertil følgende fakta:

a) Alle kugler, som er lagt ind i tilstanden START, er havnet i en absorberende tilstand.

b) Ved hvert træk er kuglerne fordelt i et forhold svarende til sandsynlighederne.

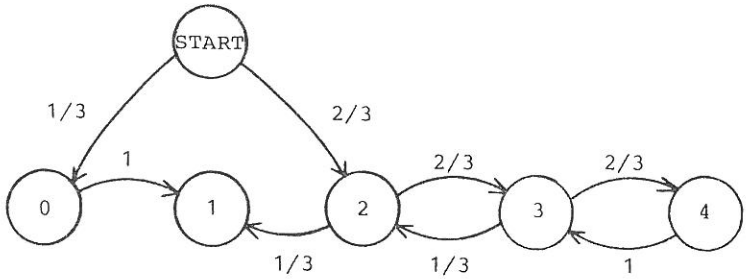
Opgave 2. Er trækfølgen slut, når følgende situation er opstået: Alle tilstande, pånær de to absorberende og START-tilstanden indeholder 1 kugle, og START-tilstanden er tom?

Opgave 3. Begrund, at man efter *endelig* mange træk opnår, at alle tilstande, pånær de absorberende, er kritisk ladede. (Benyt, at der kun er endelig mange forskellige muligheder for at lægge kugler i de ikke-absorberende tilstande, når de højst må være kritisk ladede).

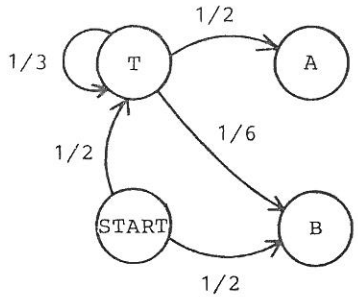
Opgave 4. Det oplyses, at det første møntkast i eksempel 2 giver resultatet P. Hvorledes ændrer dette grafen i figur 1.1? Udregn igen sandsynligheden for at stoppe i KKK, og det gennemsnitlige antal møntkast, der medgår hertil.

Opgave 5. Det er ikke nødvendigt, at alle tilstandene er kritisk ladede, når spillet startes. Væsentligt for metoden er, at spillet stoppes, når den oprindelige fordeling af kuglerne dukker op igen. Prøv at lade spillet starte med andre ladninger af tilstandene og se om det virker, f.eks. med lutter tomme tilstande.

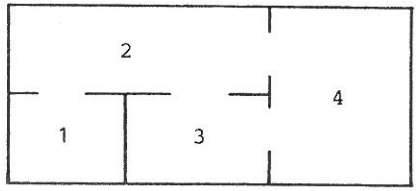
Opgave 6. Betragt eksempel 3.a. Når kampen begynder, har Peter 1 krone. Bestem, ved at udnytte R2 fra eksempel 2 på nedenstående graf, det gennemsnitlige antal spil, der går, indtil Peter atter har 1 krone.



Opgave 7. Hvad er enhedsladningen for T i nedenstående graf? Det oplyses, at man efter spillets afslutning konstaterer, at 3 kugler har passeret pilen T - A. Beregn herudfra sandsynligheden for at processen stopper i A henholdsvis B, og beregn den gennemsnitlige varighed af spillet.



Opgave 8. En rotte sættes ned i rum nummer 1 af følgende labyrint. I hver tidsenhed vælger rotten tilfældigt een af udgangene i det rum, hvori den befinder sig og går ud af denne udgang. Tegn grafen hørende til dette eksperiment. Hvor længe vil der i gennemsnit gå, før rotten første gang kommer ind i rum nummer 4.



Kapitel 4: Absorberende Markov-kæder

Afsnit 1: Sætninger

Definition 4.1.

En Markov-kæde med tilstandsrum $S = \{t_1, \ldots, t_m\}$ kaldes *absorberende* hvis tilstandsrummet består af transiente tilstande og mindst een absorberende tilstand. Endvidere skal det fra enhver af de transiente tilstande være muligt at nå til en absorberende tilstand.

I det følgende anvender vi en række betegnelser vedrørende tilstandene i tilstandsrummet for en absorberende Markov-kæde.

A betegner mængden af absorberende tilstande.

T betegner mængden af transiente tilstande.

Eksempel 4.1.

a) Markov-kæden med overgangsmatricen

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array}$$

er et eksempel på en absorberende Markov-kæde, hvor $A = \{t_1\}$ og $T = \{t_2, t_3\}$. Læg mærke til, at t_2 og t_3 ikke kommunikerer.

b) Grafen i eksempel 1.2 hører ligeledes til en absorberende Markov-kæde, hvor $A = \{PPKK, KKK\}$ og $T = \{START, K, KK, P, PP, PPK\}$.

c) Markov-kæden med overgangsmatricen

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

er en absorberende Markov-kæde. Læg mærke til, at der er 4 ækvivalensklasser ved <-->, samt at det er umuligt at nå t_1 fra t_4.

d) Eksempel 1.3.a er ligeledes en absorberende Markov-kæde. Dette spil kan generaliseres til det "Random-walk", hvis graf er illustreret i figur 1.5, og dette er ligeledes et eksempel på en absorberende Markov-kæde, som vi iøvrigt vender tilbage til i slutningen af kapitlet ▽

Ordnes tilstandene i en absorberende Markov-kæde således, at de første r tilstande udgør de absorberende tilstande, medens de m - r sidste tilstande er transiente, så får den tilhørende overgangsmatrix $\underline{\underline{P}}$ følgende udseende.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{cc} r & m-r \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array}$$

$\underline{\underline{P}}$ siges at være bragt på *kanonisk form*, når dette er gjort.

$\underline{\underline{E}}$ er en enhedmatrix med r rækker og søjler, svarende til overgangen ~~mellem~~ til de absorberende tilstande.

$\underline{\underline{Q}}$ er en matrix med m-r rækker og søjler, svarende til overgang mellem de transiente tilstande.

$\underline{\underline{R}}$ er en matrix med m-r rækker og r søjler, hvoraf sandsynlighederne for overgang *fra* de transiente tilstande *til* de absorberende tilstande kan aflæses. $\underline{\underline{R}}$ er ikke en nulmatrix, idet det fra mindst een transient tilstand er muligt at komme til en absorberende tilstand i eet skridt.

Den sidste delmatrix svarer til overgang fra de absorberende til de transiente tilstande. Da en sådan overgang er umulig, sluttes at delmatricen er en nulmatrix.

Eksempel 4.2.

Eksempel 4.1.a er allerede opskrevet på kanonisk form, idet

$$\underline{\underline{E}} = (\ 1\ ) \qquad \text{en } (1\times 1) \text{ matrix,}$$

$$\underline{\underline{R}}\ \cancel{\underline{\underline{Q}}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en } (2\times 1) \text{ matrix,}$$

$$\underline{\underline{Q}}\ \cancel{\underline{\underline{P}}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{en } (2\times 2) \text{ matrix.}$$

Overgangsmatricen i eksempel 4.1.c er ligeledes opskrevet på kanonisk form, idet:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en } (2\times 2) \text{ matrix,}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{en } (2\times 2) \text{ matrix,}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{en } (2\times 2) \text{ matrix.}$$

Overgangsmatricen for eksempel 1.3.a lyder:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

hvoraf $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{R}}$ og $\underline{\underline{Q}}$ direkte kan aflæses ▽

Sætning 4.1.

For en absorberende Markov-kæde, hvis overgangsmatrix er bragt på kanonisk form, gælder:

$$\underline{\underline{P}}^n = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ (\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{Q}}+\ \dots\ +\underline{\underline{Q}}^{n-1})\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}}^n \end{bmatrix} \qquad n = 1,2,\dots$$

Bevis. Vi har:

$$\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ (\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{Q}})\cdot\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^3 = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{P}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ (\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{Q}})\cdot\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ (\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{Q}}+\underline{\underline{Q}}^2)\cdot\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}}^3 \end{bmatrix},$$

og ved induktion fås det ønskede △

Eksempel 4.3.

Eksempelvis finder man ved udregning i eksempel 4.1.c:

$$\underline{\underline{P}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{P}}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 7/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \nabla$$

Sætning 4.1 udtaler sig om, hvorledes en absorberende Markov-kæde udvikler sig over et tidsrum på n tidsenheder.

Vi er dog mere interesseret i at få en idé om, hvorledes den absorberende Markov-kæde forholder sig i det lange løb, d.v.s., vi vil studere overgangsmatricen $\underline{\underline{P}}^n$ for n gående mod uendelig. Det første skridt i den retning er følgende sætning:

Sætning 4.2.

Sandsynligheden for, at en absorberende Markov-kæde ender i en absorberende tilstand vil, uanset hvor processen startes, gå mod 1, når tiden ~~tiden~~ går mod uendelig.

Sætningens indhold kan omformuleres på mange måder. Een formulering siger, at sandsynligheden for at blive mellem de transiente tilstande vil gå mod 0, når tiden går mod uendelig, d.v.s., $\underline{\underline{Q}}^n$ går mod nulmatricen, når n går mod uendelig. Dette bekræftes af eksempel 4.3, hvor man finder:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & 1/2^n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Den anden formulering af sætningen lyder: Med sandsynligheden 1 stopper processen efter endelig tid i en absorberende tilstand, uanset hvor den startes. Dette forhold blev allerede udnyttet i eksempel 1.2.

Bevis for sætning 4.2. Sætningens påstand er triviel, hvis processen startes i en absorberende tilstand. Antag derfor, at processen startes i en transient tilstand t_i. Definitionen af en absorberende Markov-kæde viser os, at der er positiv sandsynlighed for at nå til en absorberende tilstand i endelig mange skridt fra t_i. Man kan derfor bestemme et $p > 0$ og et naturligt tal k med følgende egenskaber: Sandsynligheden for at nå en absorberende tilstand fra t_i i højst k skridt er mindst p, d.v.s., sandsynligheden for *ikke* at nå en absorberende tilstand i højst k skridt er højst $1 - p$.

Sandsynligheden for ikke at nå en absorberende tilstand i højst kj skridt er følgelig højst $(1 - p)^j$. Lader vi j gå mod uendelig sluttes, da $1 - p < 1$, at $(1 - p)^j$ går mod 0 for j gående mod uendelig, hvilket viser det ønskede △

Definition 4.2.

Betragt en vilkårlig, endelig Markov-kæde med tilstandsrum $S = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. På udfaldsrummet T_n defineres stokastiske variable ved:

$$N_j^{(n)}(u) = \text{antal gange u passerer } t_j,\ u \in T_n.$$

$$E_i(N_j^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot P_i[N_j^{(n)}=k].$$

$$N_{ij} = \lim_{n\to\infty} E_i(N_j^{(n)}).$$

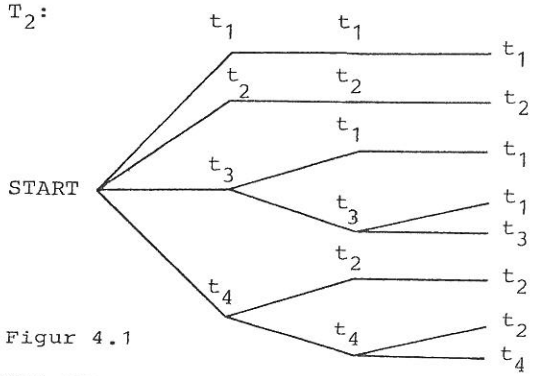
$N_j^{(n)}$ er altså en stokastisk variabel med værdimængden $\{0,1,\ldots,n+1\}$, og den fortæller, hvor mange gange en bestemt tilstand t_j passeres i tidsrummet fra 0 til n.

$E_i(N_j^{(n)})$ er middelværdien af $N_j^{(n)}$, når processen startes i t_i. Endelig angiver N_{ij} det gennemsnitlige antal gange, tilstanden t_j passeres, når processen startes i t_i, og definitionen af N_{ij} bygger på den definition, vi gav i kapitel 3 afsnit 4 vedrørende et uendeligt tidsinterval.

Det bemærkes, at den stokastiske variabel $N_j^{(n)}$ er ganske analog til den stokastiske variabel, som i n kast med en mønt tæller antallet af gange, man får plat.

Eksempel 4.4.

Hørende til Markov-kæden i eksempel 4.1.c har vi følgende træ T_2:



Figur 4.1

Her er:

$$N_1^{(2)}(t_1,t_1,t_1) = 3\ ,\ N_1^{(2)}(t_3,t_3,t_3) = 0,$$
$$N_1^{(2)}(t_2,t_2,t_2) = 0\ ,\ N_1^{(2)}(t_4,t_2,t_2) = 0,$$
$$N_1^{(2)}(t_3,t_1,t_1) = 2\ ,\ N_1^{(2)}(t_4,t_4,t_2) = 0,$$
$$N_1^{(2)}(t_3,t_3,t_1) = 1\ ,\ N_1^{(2)}(t_4,t_4,t_4) = 0.$$

Sætning 4.3.

$$N_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)}.$$

Bevis. Beviset minder meget om et tilsvarende bevis for beregning af middelværdien af binomialfordelingen.

Vi sætter:

$$I^{(k)}(u) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } u_k = t_j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad u \in T_n$$

$I^{(k)}$ er altså en stokastisk variabel, som antager værdien 1 eller 0 afhængig af, om processen til tiden k befinder sig i t_j eller ej. Derfor er $E_i(I^{(k)})$ lig med sandsynligheden for hændelsen $[X_k=t_j]$, d.v.s.,

$$E_i(I^{(k)}) = P_i[X_k=t_j] = p_{ij}^{(k)},$$

og da man yderligere indser, at:

$$N_j^{(n)} = I^{(0)} + I^{(1)} + \ldots + I^{(n)},$$

gælder

$$E_i(N_j^{(n)}) = E_i(I^{(0)}) + E_i(I^{(1)}) + \ldots + E_i(I^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)},$$

og dermed

$$N_{ij} = \lim_{n\to\infty} E_i(N_j^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)} \quad \triangle$$

Foreløbig siges intet om, hvorvidt N_{ij} er endelig eller uendelig. Vi skal dog senere vise, at N_{ij} er endelig, når tilstandene t_i og t_j er transiente tilstande i en absorberende Markov-kæde. Selve formlen i sætning 4.3 er ubekvem at regne med, derfor skal vi senere give et alternativt udtryk for N_{ij}.

Sætning 4.4.

I en absorberende Markov-kæde, hvor $\underline{Q}$ har den ovenfor anførte betydning, og $\underline{\underline{E}}$ er en enhedsmatrix med m-r rækker og søjler gælder følgende:

$(\underline{\underline{E}} - \underline{Q})^{-1}$ eksisterer.

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{Q})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}^k \qquad (\text{hvor } \underline{Q}^0 = \underline{\underline{E}})$$

Bevis.

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})\left(\sum_{k=0}^{n} \underline{\underline{Q}}^k\right) = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{Q}} + \ldots + \underline{\underline{Q}}^n) =$$

$$(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{Q}} + \ldots + \underline{\underline{Q}}^n) - (\underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^2 + \ldots + \underline{\underline{Q}}^{n+1}) =$$

$$\underline{\underline{E}} + (\underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}}) + \ldots + (\underline{\underline{Q}}^n - \underline{\underline{Q}}^n) - \underline{\underline{Q}}^{n+1} =$$

$$\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}}^{n+1}$$

Tilsvarende ses at:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \underline{\underline{Q}}^k\right)(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}}) = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{Q}} + \ldots + \underline{\underline{Q}}^n) - (\underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^2 + \ldots + \underline{\underline{Q}}^{n+1}) =$$

$$\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}}^{n+1}$$

Af sætning 4.2 fremgår, at $\underline{\underline{Q}}^{n+1} \to \underline{\underline{0}}$ for $n \to \infty$ og dette giver:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \underline{\underline{Q}}^k\right)\right)(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}}) = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \underline{\underline{Q}}^k\right)\right) = \underline{\underline{E}}$$

og dette viser på een gang begge påstande △

Efter disse forberedelser er vi istand til at vise vort hovedresultat om absorberende Markov-kæder. Nu kan vi nemlig udregne forskellige relevante størrelser, som fortæller hvorledes kæden udvikler sig i det lange løb. Det drejer sig om følgende værdier, som alle vil blive udregnet:

N_{ij} = det gennemsnitlige antal gange t_j passeres ved start i t_i. Både t_i og t_j er transiente tilstande.

b_{ij} = sandsynligheden for at processen absorberes i den absorberende tilstand t_j ved start i den transiente tilstand t_i.

N_i = det gennemsnitlige antal skridt indtil processen stopper i en absorberende tilstand, når den startes i den transiente tilstand t_i.

Elementerne N_{ij} sammenfattes til en matrix $\underline{\underline{N}}$ med m-r rækker og søjler.

Elementerne b_{ij} sammenfattes til en matrix $\underline{\underline{B}}$ med m-r rækker og r søjler.

Med disse definitioner kan kapitlets hovedsætning formuleres:

Sætning 4.5.

Hvis overgangsmatricen $\underline{\underline{P}}$ hørende til en absorberende Markov-kæde er bragt på kanonisk form gælder:

1) $\lim_{n\to\infty} \underline{\underline{P}}^n = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$

2) $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}}\,\underline{\underline{R}}$, og B er en stokastisk matrix.

3) $\underline{\underline{N}} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})^{-1}$.

4) Alle elementer i $\underline{\underline{N}}$ er endelige.

Bevis. Fra sætning 4.1 vides, at

$$\underline{\underline{P}}^n = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \underline{\underline{Q}}^k\right)\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{Q}}^n \end{bmatrix}$$

Når n går mod uendelig, vil $\underline{\underline{Q}}^n$ gå mod 0 i flg. sætning 4.2, og matricen $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \underline{\underline{Q}}^k\right)\underline{\underline{R}}$ angiver sandsynligheden for, at processen, når den startes i en transient tilstand, bliver absorberet senest til tiden n. Derfor er

$$\underline{\underline{B}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \underline{\underline{Q}}^k\right)\underline{\underline{R}},$$

og sætning 4.3 viser, at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}}\underline{\underline{R}}$. Sammenholdes endelig sætningerne 4.3 og 4.4, finder man, at

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\underline{Q}}^k = \underline{\underline{N}},$$

hvilket viser punkterne 3) og 4) △

Sætning 4.6.

Hvis en absorberende Markov-kæde startes i en transient tilstand t_i, vil der i gennemsnit gå

$$N_i = \sum_{t_j \in T} N_{ij}$$

tidsenheder, før processen er blevet absorberet i een eller anden absorberende tilstand.

Bevis. For hvert n angiver $\sum_{t_j \in T} N_j^{(n)}$ det antal skridt, man langs vejen $u \in T_n$ tilbringer blandt de transiente tilstande. Tallet $\sum_{t_j \in T} E_i(N_j^{(n)})$ fortæller derfor, hvor mange skridt man i middel tilbringer blandt de transiente tilstande i tidsrummet 0 til n,

når man starter processen i t_i. Grænseovergangen $n\to\infty$ med dette tal giver os derfor N_i, altså:

$$N_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_j \in T} E_i(N_j^{(n)}) = \sum_{t_j \in T} \lim_{n\to\infty} E_i(N_j^{(n)}) = \sum_{t_j \in T} N_{ij} \quad \triangle$$

Eksempel 4.5.

Som et simpelt taleksempel kan man tage eksempel 4.1.c, hvor man i flg. eksempel 4.2 har:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ og dermed } \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Derfor bliver

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

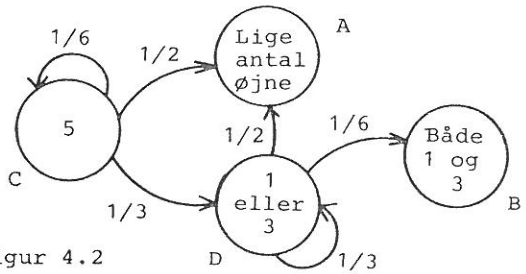
$N_{11} = 2$ betyder, at processen i gennemsnit vil passere t_3 2 gange inden den ender i en absorberende tilstand, hvis processen startes i t_3. Tilsvarende betyder $N_{22} = 2$, at processen vil passere t_4 2 gange før den bliver absorberet, hvis den startes i t_4. Af matricen $\underline{\underline{N}}$ ses endvidere, at det i gennemsnit varer 2 tidsenheder før processen bliver absorberet, når den startes i t_3. Endelig er

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}}\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det kan ikke undre, at matricen $\underline{\underline{B}}$ ser ud som den gør, idet processen kun kan absorberes i t_1, når den startes i t_3, og i t_2, når den startes i t_4 ∇

Eksempel 4.6.

Følgende simple spil giver et lidt mere indholdsrigt eksempel. En terning kastes. Vi søger sandsynligheden for at få en etter *og* en treer, før man får et lige antal øjne. Problemet kan omformuleres til en absorberende Markov-kæde med den tilhørende graf.



Figur 4.2

Overgangsmatricen $\underline{\underline{P}}$ bliver:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$$

Her er

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

altså

$$\underline{\underline{N}} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}})^{-1} = \frac{9}{5}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & 3/5 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

og

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}}\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 6/5 & 3/5 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \end{array} \begin{array}{c} C \\ D \\ \end{array}$$

Tilstanden C kan betragtes som processens starttilstand. Det oprindelige spørgsmål er da ækvivalent med at bestemme sandsynligheden for at blive absorberet i B, når man starter i C. Svaret kan aflæses i matricen $\underline{\underline{B}}$ til 0.1, og summen af første række i $\underline{\underline{N}}$ viser, at man i gennemsnit bruger 9/5 kast, inden spillet er afgjort ∇

Afsnit 2: Eksempler

Eksempel 1.2 gav to regler, hvorved man kunne beregne de størrelser, vi her i kapitel 4 har defineret som relevante for absorberende Markov-kæder. Vi vil nu anskue eksempel 1.2 fra en mere generel synsvinkel, og samtidigt bevise at reglerne fra eksempel 1.2 og teorien i kapitel 4 stemmer overens med hinanden. Den grundlæggende idé bag spillet fra eksempel 1.2 er, at man opfatter en absorberende Markov-kæde som et system bestående af beholdere (=tilstande), samt rør, der forbinder disse tilstande. Rørene har en tykkelse, som svarer til sandsynligheden for overgang mellem tilstandene.

En bestemt beholder udnævnes til START og i denne hældes 1 liter væske. Væsken løber nu ned gennem rørene, hele tiden i forhold svarende til sandsynligheden for overgangen mellem tilstandene. Væsken vil efterhånden fordele sig i de beholdere,

som ikke afgiver væske (d.v.s. de absorberende tilstande), medens der ikke vil være noget tilbage i alle de øvrige beholdere. Lad os udnævne den transiente tilstand t_j til START og derefter forsøge at besvare følgende spørgsmål:

1) Hvor meget væske løber ned i de forskellige absorberende beholdere?

Den væskemængde, som havner i den absorberende tilstand t_i, sættes til c_{ji}, og af disse tal dannes matricen $\underline{\underline{C}}$ med m-r rækker og r søjler.

2) Hvor meget væske er løbet gennem de transiente beholdere?

Vi lader a_{ji} stå for den væskemængde, som løber *ud* af den transiente tilstand t_i, og disse tal sammenfattes til matricen $\underline{\underline{A}}$ med m-r rækker og søjler.

For alle transiente tilstande gælder, at der er passeret samme væskemængde ind og ud af tilstanden. Derfor kan følgende ligningssystem opstilles, når t_i er en transient tilstand:

$$\text{UD af } t_i\text{:}\quad a_{ji} \qquad \text{IND i } t_i\text{:}\quad \begin{cases} \sum\limits_{t_k \in T} a_{jk}p_{ki} & \text{når } t_i \neq t_j \\ 1 + \sum\limits_{t_k \in T} a_{jk}p_{kj} & \text{når } t_i = t_j \end{cases}$$

altså ved at anvende ligningen UD = IND:

$$a_{ji} = \sum_{t_k \in T} a_{jk}p_{ki} \qquad i \neq j, \quad a_{jj} = 1 + \sum_{t_k \in T} a_{jk}p_{kj}$$

Sammenfattes alle disse ligninger, hvor både t_i og t_j er transiente tilstande til matrixform, får man:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Q}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{Q}}) = \underline{\underline{E}},$$

hvilket netop i flg. sætning 4.5 betyder at $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{N}}$.

Ser vi dernæst på en absorberende beholder t_i, gælder:

$$c_{ji} = \sum_{t_k \in T} a_{jk}p_{ki}.$$

Sammenfattes alle disse ligninger til matrixform lyder denne:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{N}}\underline{\underline{R}}, \text{ d.v.s., } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}.$$

Resultatet kan sammenfattes til følgende <u>gennemstrømningsmetode</u>:

Den væskemængde, som løber gennem t_i, når 1 liter væske hældes ned i t_j

svarer til

Det gennemsnitlige antal gange t_i passeres, når processen startes i t_j (t_i og t_j tilhører T).

Den væskemængde, som ender i t_i, når 1 liter væske hældes ned i t_j

svarer til

Sandsynligheden for, at processen absorberes i t_i, når den startes i t_j (t_i er en absorberende tilstand og t_j er en transient tilstand).

Det burde nu være indlysende, at det spil vi gennemgik i eksempel 1.2 nøjagtigt svarer til den nye fortolkning, vi netop har givet af absorberende Markov-kæder. Forskellen er blot, at medens vi i eksempel 1.2 kun kunne behandle eksempler, hvor overgangssynlighederne var givet som brøker, så er denne forudsætning nu overflødig. I eksempel 1.2 blev det også vist, hvorledes gennemstrømningsmetoden anvendes i praksis: Man udnytter ligningen IND = UD for at finde sandsynligheden for at ende i de forskellige absorberende tilstande.

Endnu et eksempel kan måske illustrere den praktiske anvendelse af gennemstrømningsmetoden.

<u>Eksempel 4.7.</u>

"Crap" er et populært amerikansk terningspil, hvis spilleregler går ud på følgende:

To terninger kastes, og øjensummen observeres.
Er øjensummen lig med 7 eller 11, så har kasteren vundet, medens han har tabt, hvis øjensummen er lig med 2, 3 eller 12.
Giver første kast ikke een af ovenstående øjensummer, fortsættes, indtil man enten får 7 som øjensum, og da taber man, eller samme øjensum som i det første kast, og da vinder man.

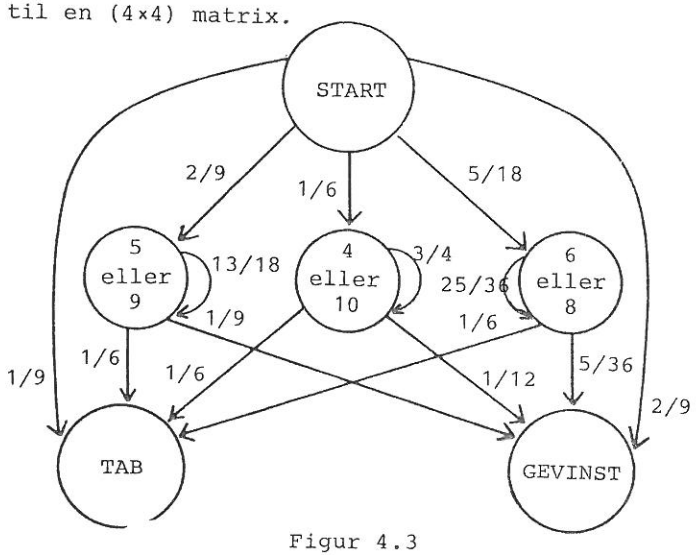
Det lyder indviklet, og for at få et bedre overblik over spillet tegnes grafen hørende til denne Markov-kæde. Herunder forudsættes bekendt, at sandsynlighederne for de forskellige øjensummer er givet ved:

øjensum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sandsynlighed	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Vi vil interessere os for at beregne:

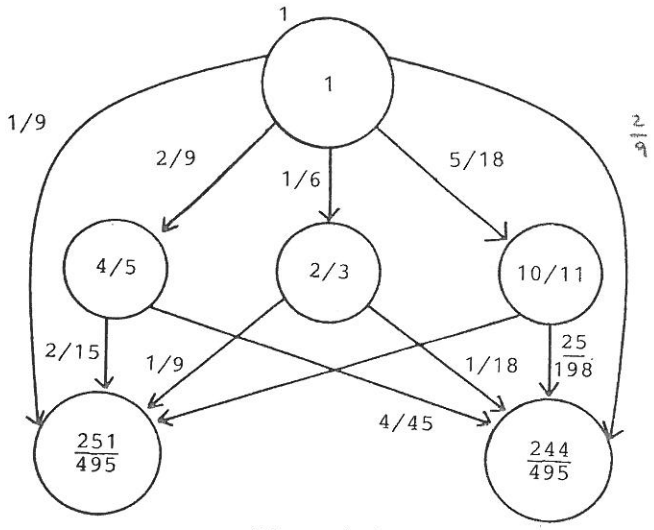
1) Sandsynligheden for at terningkasteren vinder spillet.
2) Den gennemsnitlige længde af et spil.

Bruges den fra afsnit 1 kendte matrixmetode til bestemmelse af størrelserne, bliver man nødt til at danne den inverse matrix til en (4×4) matrix.



Figur 4.3

Dette er alt for besværligt, derfor benyttes istedet gennemstrømningsmetoden, som uden videre giver os svaret på de to spørgsmål.For hver tilstand udregnes den væskemængde, som er løbet gennem tilstanden. Dette giver følgende resultat:



Figur 4.4

Eksempelvis forløber beregningen af væskemængden gennem tilstanden "5 eller 9" ved, at den indløbende væskemængde sættes lig x. Denne væskemængde stammer fra to kilder, nemlig 2/9 fra tilstanden START og 13/18·x, som løber tilbage i tilstanden "5 eller 9", d.v.s., der gælder:

$$\frac{2}{9} + \frac{13}{18}x = x \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}.$$

Denne væskemængde løber ud af tilstanden "5 eller 9" og fordeler sig med $\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{15}$ til "TAB", $\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{45}$ til "GEVINST" og $\frac{13}{18}\cdot\frac{4}{5} = \frac{26}{45}$, som løber tilbage til tilstanden "5 eller 9" igen. På denne måde beregnes væskemængden gennem alle figurens tilstande.

Sandsynligheden for, at det er terningkasteren, som vinder spillet bliver 244/495 = 0.49292... altså mindre end 1/2.

Den gennemsnitlige spillængde er:

$$1 + 4/5 + 2/3 + 10/11 = 3.38 \quad \nabla$$

Eksempel 4.8.

Eksempel 1.4.c er et berømt eksempel på en absorberende Markovkæde. Allerede under omtalen i kapitel 1 omtalte vi, at med sandsynligheden 1 ville populationen efter endelig mange generationer bestå af udelukkende A-forekomster eller udelukkende a-forekomster, og det ses nu, at vi har bevist dette resultat i sætning 4.2.

Det er selvfølgelig også interessant at vide, hvilken sandsynlighed der er for at ende med lutter A-forekomster henholdsvis lutter a-forekomster, hvis den første generation har j a-forekomster og dermed 2N-j A-forekomster.

Svaret på dette spørgsmål er overraskende simpelt:

Sandsynligheden for at ende med 0 a-forekomster er lig 1 - j/2N.

Sandsynligheden for at ende med 0 A-forekomster (= 2N a-forekomster) er lig j/2N.

Det er imidlertid ret indviklet at bevise denne sætning. Gennemstrømningsmetoden kan for en gangs skyld ikke betale sig, fordi man i eet skridt kan bevæge sig mellem vilkårlig to transiente tilstande, hvilket ~~fører til~~ giver nogle uhyre komplicerede ligninger, som ingen vegne fører.

Af hensyn til de specielt interesserede bringes her et bevis for påstanden:

Læg mærke til, at der gælder:

$$p_{ij} = b(2N, j, i/2N),$$

d.v.s., sandsynligheden for i een generation at skifte fra i a-forekomster til j a-forekomster er bestemt ved binomialfordelingen med parametre $(2N, i/2N)$.

Hvis en generation består af i a-forekomster, vil den næste generation i middel bestå af

$$\sum_{j=0}^{2N} jp_{ij} = 2N \cdot \frac{i}{2N}.$$

Antag nu, at populationen i første generation har j a-forekomster. Ved induktion kan det nu vises, at for alle n gælder:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{2N} kp_{jk}^{(n)} = j.$$

For n = 1 er dette netop blevet bevist.

Antag dernæst, at sætningen er gyldig for et vist n. Induktionsbeviset er fuldført hvis det lykkes at vise, at

$$\sum_{k=0}^{2N} kp_{jk}^{(n+1)} = j.$$

Nu er:

$$\sum_{k=0}^{2N} kp_{jk}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{2N} k \sum_{l=0}^{2N} p_{jl}^{(n)} p_{lk} = \sum_{l=0}^{2N} p_{jl}^{(n)} \sum_{k=0}^{2N} kp_{lk} =$$

$$\sum_{l=0}^{2N} lp_{jl}^{(n)} = j,$$

hvor det næstsidste lighedstegn skyldes, $\sum_{k=0}^{2N} kp_{lk} = l$. Hermed er induktionsbeviset fuldført.

Alle tilstande $\{1, 2, \ldots, 2N-1\}$ er transiente, medens $\{0, 2N\}$ er persistente. Derfor vil $p_{jk}^{(n)} \to 0$ for alle $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$, når $n \to \infty$, medens $p_{j0}^{(n)} \to a_j$ og $p_{jk}^{(n)} \to 1 - a_j$ for $n \to \infty$. Her betegner a_j sandsynligheden for, at processen absorberes i 0, under forudsætning af start i j. Går n derfor mod uendelig i identiteten (*), opnås i grænsen følgende ligning til bestemmelse af a_j:

$$0 \cdot a_j + 2N \cdot (1 - a_j) = j \quad \text{hvoraf } a_j = 1 - j/2N.$$

Dette viser det ønskede ▽

Opgaver til kapitel 4

Opgave 1. Hvilke af følgende overgangsmatricer svarer til absorberende Markov-kæder?
For de absorberende Markov-kæder skal overgangsmatricen bringes på kanonisk form, og matricerne $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{R}}$ og $\underline{\underline{Q}}$ skal bestemmes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Opgave 2. En absorberende Markov-kæde har tilstandsrummet $S = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ hvor t_4, t_5 og t_6 er absorberende.
a) Opskriv et eksempel på en tilhørende overgangsmatrix, således at der bliver færrest mulig ækvivalensklasser ved <-->.
b) Opskriv et eksempel på en overgangsmatrix, således at Markov-kæden får flest mulig ækvivalensklasser ved <-->.

Opgave 3. Matricen:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

er overgangsmatrix hørende til en absorberende Markov-kæde.
Bestem matricerne $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{R}}$ og $\underline{\underline{Q}}$.
Udregn $\underline{\underline{P}}^2$, $\underline{\underline{P}}^3$ og $\underline{\underline{P}}^4$. Bestem endelig $\lim_{n\to\infty} \underline{\underline{P}}^n$.

Opgave 4. Gennemregn eksempel 4.6 under brug af gennemstrømningsmetoden.
(Vink: Antag først, at processen starter i D. Beregn under denne forudsætning sandsynligheden for at blive absorberet i henholdsvis A og B, på samme måde som i eksempel 4.7. Antag dernæst, at processen starter i C, og gå frem på samme måde.)

Opgave 5. En urne indeholder en rød, gul, blå og sort kugle.
Fra urnen trækkes tilfældigt en kugle, farven noteres og kuglen lægges tilbage igen.
Hvor mange gange skal man i gennemsnit trække, før alle farver har været fremme?

Opgave 6. I eksempel 1.1 starter familien Hansen med at abonnere på avisen A.
Hvorlænge vil der i gennemsnit gå, før familien første gang tegner abonnement på avisen C?
(Vink: Omdan tilstanden C til en absorberende tilstand. Beregn dernæst hvorlænge der går, inden processen havner i C.)

Opgave 7. Vis, med betegnelserne hentet fra sætning 4.5, at der gælder:
1) $\underline{\underline{N}}$ har en invers matrix, og man har $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{N}}^{-1}$.
2) $\underline{\underline{N}}\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{E}}$.

Opgave 8. Tre tanks udkæmper et slag. Den ene tank, A, rammer sit mål med sandsynligheden 2/3. De tilsvarende sandsynligheder for B og C er henholdsvis 1/2 og 1/3.
Alle tanks skyder samtidigt mod deres mål, og en tank, der rammes, sættes helt ud af spillet. Alle tanks skyder mod sin stærkeste modstander.
1) Vis, at der er følgende muligheder for kombinationsmuligheder af funktionsduelige tanks:

$$\{ABC,\ BC,\ AC,\ C,\ B,\ A,\ \emptyset\}.$$

2) Idet disse kombinationer benyttes som tilstande, skal det vises, at tank-slaget kan beskrives som en absorberende Markov-kæde med følgende overgangsmatrix:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \emptyset \\ A \\ B \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \emptyset & A & B & C & AC & BC & ABC \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2/9 & 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 & 0 & 0 \\
1/6 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4/9 & 2/9 & 2/9 & 1/9
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

3) Da processen starter i ABC, skal man beregne sandsynligheden for at havne i hver af de absorberende tilstande.
(Vink: Benyt gennemstrømningsmetoden på samme måde som i eksempel 4.7)

4) Hvor mange skud affyres i gennemsnit under tankduellen?

Opgave 9. Betragt et gen, som forekommer i to former A og a, d.v.s., der er 3 genotyper nemlig AA, Aa og aa.
Vi vil studere en arvelighedsmodel, hvor parringen i alle generationer foregår mellem to søskende af modsat køn. De to søskende er udvalgt tilfældigt blandt forældrenes afkom.
Består forældreparringen f. eks. i parringen AA×Aa, så bliver afkommet af genotyperne AA eller Aa i forholdet 1:1.
I næste generation kan der derfor blive tale om følgende søskendeparring: AA×AA, AA×Aa, Aa×Aa, og det indtræffer med sandsynlighederne 1/4, 1/2 og 1/4.
Gør rede for, at søskendeparringen kan beskrives som en absorberende Markov-kæde med følgende overgangsmatrix:

$$
\begin{array}{c}
AA\times AA \\ aa\times aa \\ AA\times Aa \\ Aa\times aa \\ Aa\times Aa \\ AA\times aa
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\
1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Antag, at den første forældreparring finder sted som Aa×Aa.
Hvad er sandsynligheden for at ende med parringer af formen aa×aa?

Opgave 10. En symmetrisk mønt kastes, indtil mønstret 101 eller 1001 er dukket op.
Vis, at dette eksperiment kan beskrives som en absorberende Markov-kæde, opskriv overgangsmatricen og tegn den tilhørende graf.
Bestem sandsynligheden for at ende i hver af de absorberende tilstande.
Bestem det gennemsnitlige antal kast, der går, inden et af de ønskede mønstre dukker op.
Opgave 11 og 12 knytter sig til eksempel 4.8.

Opgave 11. Peter har 10 kroner, Poul har 5 kroner. Peter vinder de enkelte spil med sandsynligheden 0.4, og Poul med sandsynligheden 0.6.
Hvad er sandsynligheden for at Poul vinder kampen?
Hvad bliver sandsynligheden, hvis Poul i stedet har 1 krone?
hvis Poul har 10 kroner?

Opgave 12. Antag, at Poul vinder med sandsynligheden 0.5005, og Peter med sandsynligheden 0.4995.
Hvor stor skal Pouls formue være, for at han har sandsynligheden 0.999 for at ruinere Peter, uanset hvor stor Peters formue er?