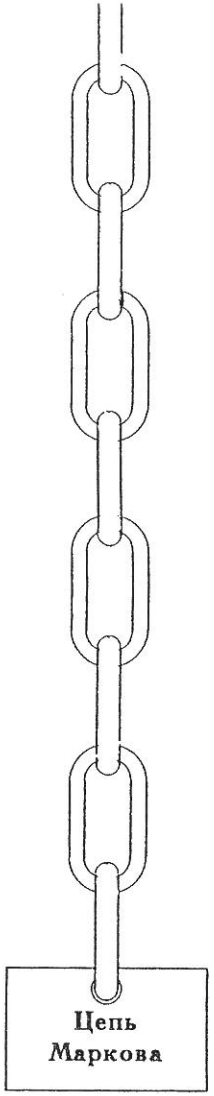
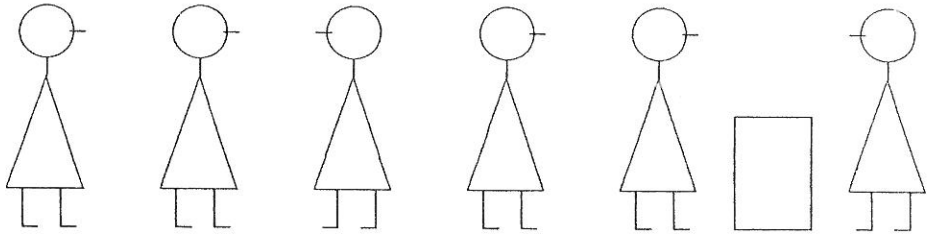


Søren L. Buhl

INTRODUKTION TIL MARKOV-KÆDER OG KØTEORI

Aalborg Universitetscenter
1988



ANDREJ ANDREJEVITJ MARKOV
russer, 1856-1922
Teorija Verojatnostej

DEL I
MARKOV-KÆDER

3 Endelige Markov-kæder

Vi ser på et system, der kan befinde sig i et endeligt antal tilstande. Systemet observeres til diskrete tidspunkter (ofte – men ikke nødvendigvis – med ækvidistant tidsinterval), enten fordi det kun kan ændre sig til disse tidspunkter, eller fordi man ikke anser det for nødvendigt at foretage løbende overvågning. Systemets tilstande til tiderne $0, 1, 2, \ldots$ udtrykkes ved de stokastiske variable $X_0, X_1, X_2, \ldots$ I elementære kurser i sandsynlighedsregning ses ofte på den situation, at de stokastiske variable er uafhængige og identisk fordelte. Vi skal her se på et af de simpleste tilfælde af afhængighed.

Vi siger, at systemet har *Markov-egenskaben*, såfremt den betingede sandsynlighedsfordeling til ethvert (observeret) tidspunkt, givet det tidligere forløb, kun afhænger af den senest observerede tilstand, altså såfremt

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

for alle valg af tidspunkt n og følge af tilstande $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}$. Man kan udtrykke det på den måde, at ved en prognose om fremtiden $n+1$ er det nok at kende tilstanden i nutiden n. Yderligere information om forløbet i fortiden $0, \ldots, n-1$ har ingen indflydelse.[1]

[1] Et ikke-stokastisk eksempel fra den klassiske fysik kan måske bidrage til at belyse, hvad det drejer sig om: En partikel bevæger sig i et kraftfelt. Hvis man til et givet tidspunkt kender partiklens position og hastighed, behøver man ikke oplysninger om fortiden for at forudsige dens videre bevægelse. Markov-egenskaben er derfor opfyldt. Hvis man derimod kun observerer partiklens position, må man også kende dens tidligere positioner for at kunne forudsige dens bane. For positionen alene er Markov-egenskaben altså ikke opfyldt.

De betingede sandsynligheder $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ kaldes *overgangssandsynligheder*. De siges at være *stationære*, såfremt de ikke afhænger af tidspunktet n. Vi kan i så fald sætte

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

for alle tilstande i, j uafhængigt af tiden n.

Et system, der opfylder ovennævnte forudsætninger, kaldes en *endelig Markov-kæde*. Der skal altså gælde:

(1) endelig mange tilstande,

(2) diskret tid,

(3) Markov-egenskaben,

(4) stationære overgangssandsynligheder.

For overgangssandsynlighederne p_{ij} gælder åbenbart $p_{ij} \geq 0$ for alle i, j og $\sum_j p_{ij} = 1$ for alle i, hvor den sidstnævnte formel udtrykker, at når systemet til et tidspunkt befinder sig i tilstand i, må det nødvendigvis befinde sig i en eller anden tilstand en tidsenhed senere. Sammenfattende kan vi danne *overgangsmatricen* $\mathbf{P} = (p_{ij})$, hvor i er rækkeindeks, og j er søjleindeks. Der er åbenbart tale om en matrix med ikke-negative elementer og alle rækkesummer lig 1.

Eksempel 3.1. I en projektgruppe er der 6 studerende, 4 drenge og 2 piger. Ved en evaluering udspørges de studerende én efter én i en tilfældig rækkefølge. Til de 6 på hinanden følgende tidspunkter kan systemet befinde sig i én af to tilstande: D eller P. Her er Markov-egenskaben *ikke* opfyldt, da den relevante oplysning til at forudsige, om fx den fjerde udspurgte er en dreng eller en pige, ikke alene er kønnet af den tredje udspurgte, men hvor mange af hvert køn, der hidtil er blevet udspurgt. □

Eksempel 3.2. Et system har tilstandene 0 og 1, og det observeres til tiderne 0, 1 og 2. For de 8 mulige forløb er givet sandsynlighederne:

forløb	000	001	010	011	100	101	110	111
ssh.	0.24	0.16	0.04	0.06	0.06	0.04	0.16	0.24

Idet stjerne (*) betegner summation over tilstande, har vi

$$P(X_2 = 0 \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = \frac{P(000)}{P(00*)} = \frac{0.24}{0.40} = 0.6,$$

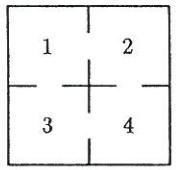
$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = \frac{P(*00)}{P(*0*)} = \frac{0.30}{0.50} = 0.6.$$

Begge betingede sandsynligheder er altså 60%. Tilsvarende resultater kan vises for de andre 7 tilfælde. (Nogle tilfælde følger automatisk af de andre.) Markov-egenskaben er altså opfyldt. Da

$$P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = \frac{P(00*)}{P(0**)} = \frac{0.40}{0.50} = 0.8$$

afviger fra $P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)$, er overgangssandsynlighederne ikke stationære. Der er altså ikke tale om en Markov-kæde efter ovennævnte definition.[2] □

Eksempel 3.3. Figuren nedenfor viser 4 rum med døre imellem. En laboratorierotte vælger tilfældigt med passende tidsmellemrum en dør til et andet rum, indtil den når rum 4, hvor der er føde. Her forbliver den.



Vi antager, at forsøget kan beskrives ved en Markov-kæde med

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

som overgangsmatrix. □

Eksempel 3.4. Antag, at der i en by forhandles 3 kaffemærker, A, B og C. Hver husstand bruger én pose kaffe om ugen. Hvis en familie i en given uge bruger mærket A, er der sandsynlighederne 10% for skift til mærket B og 5% for skift til mærket C i den næste uge. Hvis B bruges, er tallene: 15% til A og 5% til C. For C er tallene: 20% til A og 15% til B. Systemet beskrives som en Markov-kæde med overgangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.20 & 0.15 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

[2] Mange kalder systemet en ikke-stationær Markov-kæde, men vi må foretage en afgrænsning af terminologien her.

Dette er naturligvis en grov model for forbrugsvalg. Det er tvivlsomt, om valget af kaffemærke udelukkende afhænger af den seneste uge (Markov-egenskaben), og det er klart, at ændret markedsføring vil påvirke sandsynlighederne for skift af mærke (stationariteten). □

Vi sætter $\pi_i^{(n)} = P(X_n = i)$. Tallene $\pi_1^{(n)}, \ldots, \pi_k^{(n)}$ udgør altså sandsynlighedsfordelingen til tiden n (idet tilstandene kaldes $1, \ldots, k$). Vi vil skrive fordelingen som en rækkevektor, altså

$$\boldsymbol{\pi}_n = (\pi_1^{(n)}, \ldots, \pi_k^{(n)}).$$

For fordelingsvektoren $\boldsymbol{\pi}_n$ gælder $\pi_i^{(n)} \geq 0$, $\sum_i \pi_i^{(n)} = 1$.

Ifølge reglen om den totale sandsynlighed har vi

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_i P(X_n = i)\, P(\, X_{n+1} = j \mid X_n = i\,),$$

altså

$$\pi_j^{(n+1)} = \sum_i \pi_i^{(n)} p_{ij},$$

eller i matrixsprog

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n \mathbf{P}. \tag{3.1}$$

Fordelingen ét tidstrin senere fås altså ved postmultiplikation med overgangsmatricen $\mathbf{P}$.

Eksempel 3.4. (Fortsat) I uge n er markedsandelene for de 3 kaffemærker 20%, 30%, 50%, altså

$$\boldsymbol{\pi}_n = (0.2,\ 0.3,\ 0.5).$$

(Ifølge de store tals lov kan vi for rimelig store byer identificere andele og sandsynligheder.) For uge $n+1$ fås

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = (0.2,\ 0.3,\ 0.5) \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.20 & 0.15 & 0.65 \end{pmatrix} = (0.315,\ 0.335,\ 0.350),$$

Læseren kan eftervise, at man ved fortsat postmultiplikation med $\mathbf{P}$ får

$$\boldsymbol{\pi}_{n+2} = (0.388,\ 0.352,\ 0.260),$$
$$\boldsymbol{\pi}_{n+3} = (0.435,\ 0.359,\ 0.206),$$
$$\boldsymbol{\pi}_{n+4} = (0.465,\ 0.362,\ 0.174).$$

Mon mærket C forsvinder fra markedet? □

Vi vil nu se på overgangssandsynlighederne, når man går 2 tidstrin frem. Vi har ifølge reglen om den totale sandsynlighed, som her er anvendt betinget mht. hændelsen $X_n = i$

$$\begin{aligned} P(X_{n+2} = j \mid X_n = i) \\ &= \sum_k P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+2} = j \mid X_n = i, X_{n+1} = k) \\ &= \sum_k P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k) \\ &= \sum_k p_{ik} p_{kj}. \end{aligned}$$

Vi sætter $p_{ij}^{(2)} = P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$ og ser, at totrinsovergangsmatricen $\mathbf{P}^2 = (p_{ij}^{(2)})$ fås ved matrixmultiplikation af $\mathbf{P}$ med sig selv. Ved induktion ser man, at n-trinsovergangsmatricen er $\mathbf{P}^n = (p_{ij}^{(n)})$.

Ud fra startfordelingen $\boldsymbol{\pi}_0$ og overgangsmatricen $\mathbf{P}$ kan vi angive sandsynligheden for ethvert forløb. Af kædereglen for betingede sandsynligheder og Markov-egenskaben får vi

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) &= \\ &= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \\ &\qquad \times P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1) \cdots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \end{aligned}$$

Omvendt kan man vise, at enhver stokastisk vektor

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_1^{(0)}, \ldots, \pi_k^{(0)}), \qquad \pi_i^{(0)} \geq 0, \quad \sum_i \pi_i^{(0)} = 1$$

sammen med enhver stokastisk matrix

$$\mathbf{P} = (p_{ij}), \qquad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

definerer en Markov-kæde.

En Markov-kæde siges at være *regulær*, såfremt der eksisterer et n, så n-trinsovergangsmatricen $\mathbf{P}^n$ ikke indeholder nuller. Det er let at se, at hvis $p_{ij}^{(n)} > 0$ for *alle* i, j gælder for et vist antal trin n, så gælder det samme for alle større værdier af n, altså hvis $\mathbf{P}^n$ ikke indeholder nuller, så gælder det

samme $\mathbf{P}^{n+1}, \mathbf{P}^{n+2}, \ldots$ En metode til hurtigt at finde overgangssandsynligheder mange trin frem er *fordoblingsmetoden*:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}^2, \quad \mathbf{P}^8 = \mathbf{P}^4\mathbf{P}^4, \quad \ldots$$

Eksempel 3.3. (Fortsat) Ved fordoblingsmetoden fås:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{15}{16} \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{15}{16} \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{15}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{16} = \begin{pmatrix} \frac{1}{256} & 0 & 0 & \frac{255}{256} \\ 0 & \frac{1}{512} & \frac{1}{512} & \frac{255}{256} \\ 0 & \frac{1}{512} & \frac{1}{512} & \frac{255}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at denne Markov-kæde ikke er regulær, da den sidste række uforandret er (0, 0, 0, 1). Efterhånden er der overvældende sandsynlighed for, at rotten befinder sig i rum 4, uanset hvor den startede. □

Eksempel 3.4. (Fortsat) Denne Markov-kæde er klart regulær, da selve $\mathbf{P}$ ikke indeholder nuller. Ved fordoblingsmetoden fås

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.7475 & 0.1725 & 0.0800 \\ 0.2575 & 0.6625 & 0.0800 \\ 0.3225 & 0.2375 & 0.4400 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.6290 & 0.2622 & 0.1088 \\ 0.3889 & 0.5023 & 0.1088 \\ 0.4441 & 0.3175 & 0.2384 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.5459 & 0.3312 & 0.1229 \\ 0.4883 & 0.3888 & 0.1229 \\ 0.5087 & 0.3516 & 0.1397 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{16} = \begin{pmatrix} 0.5222 & 0.3528 & 0.1250 \\ 0.5189 & 0.3561 & 0.1250 \\ 0.5204 & 0.3543 & 0.1252 \end{pmatrix}.$$

Der noget, der tyder på, at $\mathbf{P}^n$ for $n \to \infty$ konvergerer mod en matrix, hvor alle rækker er ens. Det vil sige, at kaffemarkedet efter lang tids forløb synes at stabilisere sig, uanset hvordan det var i begyndelsen. At det virkelig forholder sig sådan, vil vi senere bevise. □

OPGAVER

3.1 * For hvert trin kastes en symmetrisk terning. Lad tilstandene $1, 2, \ldots, 6$ stå for det højeste antal øjne, der hidtil er opnået. Angiv overgangsmatricen.

3.2 * Hvad kan man sige om overgangsmatricen $\mathbf{P}$ i det tilfælde, hvor de stokastiske variable $X_0, X_1, X_2, \ldots$, der beskriver tilstandene til tiderne $0, 1, 2, \ldots$, er uafhængige?

3.3 Vis direkte ud fra (3.1), altså $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n\mathbf{P}$, at der gælder $\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_0\mathbf{P}^n$ og mere generelt $\boldsymbol{\pi}_{m+n} = \boldsymbol{\pi}_m\mathbf{P}^n$.

3.4 Eksempel 3.3 modificeres, så der ikke er føde i rum 4, og rotten derfor forlader dette rum efter samme regel som de andre rum. Opstil overgangsmatricen. Giv et simpelt argument for, at denne Markov-kæde ikke er regulær.

3.5 * 3 piger, A, B og C, kaster en bold til hinanden. A kaster altid bolden til B, og B kaster altid bolden til C. C kaster med lige stor sandsynlighed bolden til A og til B. Angiv overgangsmatricen. Er Markov-kæden regulær?

3.6 Vis, at det er nok at vide, hvor i overgangsmatricen $\mathbf{P}$ der står nuller, for at afgøre, om Markov-kæden er regulær eller ej. Vis, at for

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

hvor stjernerne står for positive tal, er Markov-kæden regulær.

3.7 I Langtbortistan kan vejret beskrives som en Markov-kæde med tilstandene 'solskin', 'overskyet' og 'regn'. Der er aldrig det samme vejr to dage i træk. Når der en dag er et givet vejr, kan begge de to andre vejrtyper forekomme næste dag. Vis på dette grundlag, at Markov-kæden er regulær.

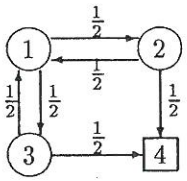
3.8 A og B har hver 2 kr. De spiller et spil, hvor A vinder med sandsynlighed p og B med sandsynlighed $q = 1 - p$. Vinderen modtager 1 kr. fra taberen. Når en af spillerne er ruineret, stopper spillet. Opstil Markov-kæden. Er den regulær? Modificér, så der tages højde for uafgjort spil.

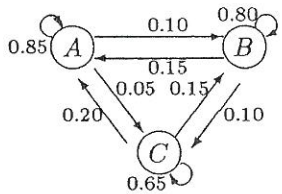
3.9 * I urnen A er der 3 hvide kugler. I urnen B er der 3 røde kugler. Ved hvert trin udtages en tilfældig kugle fra hver urne, og de to kugler bytter plads. Beskriv systemet som en Markov-kæde. Er den regulær? Find sandsynlighederne for, at den oprindelige fordeling af kuglerne fås igen efter hver af mulighederne 1, 2, 3 og 4 trin.

3.10 Ovenstående opgave generaliseres til, at der er N kugler i hver af de to urner. Opstil overgangsmatricen. (Dette kaldes *Bernoulli-Laplaces diffusionsmodel*.)

4 Klassifikation af tilstande

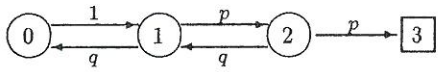
Ofte anskueliggør man en Markov-kæde ved et *overgangsdiagram*, hvor tilstandene repræsenteres ved cirkler[3] og de mulige overgange (på ét trin) med pile, på hvilke overgangssandsynlighederne kan angives. Nedenfor er vist diagrammer for eksemplerne 3.3 og 3.4:





Omvendt kan man naturligvis ud fra et overgangsdiagram angive overgangsmatricen.

Eksempel 4.1. Lad en Markov-kæde have overgangsdiagrammet



hvor $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$ er underforstået). Overgangsmatricen er:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dette er modellen for et spil om 1 kr., hvor man har sandsynligheden p for at vinde og q for at tabe. Hvis man mister sine penge, får man 1 kr. udleveret. Når man har vundet 3 kr., slutter spillet. □

Vi siger, at det er muligt at komme fra tilstand i til tilstand j, såfremt der eksisterer et antal n af trin, så $p_{ij}^{(n)} > 0$. Ifølge loven om den totale sandsynlighed er

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_{n-1}} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j},$$

[3] Undertiden ved kvadrater. Forklaring følger snart.

og mindst ét af leddene i den $(n-1)$-dobbelte sum må være positivt. Dette svarer til, at der er en rute fra i til j, der med ét trin ad gangen går over tilstandene $i, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, j$. På overgangsdiagrammet kan man altså følge pilene langs en rute fra i til j. Vi vil skrive $i \to j$.

Som bekendt defineres $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$, hvor $\mathbf{I}$ er enhedsmatricen. Svarende hertil har vi 0-trinsovergangssandsynlighederne $p_{ii}^{(0)} = 1$, $p_{ij}^{(0)} = 0$ for $i \neq j$. Ved denne konvention sikrer man, at man altid kan komme fra en tilstand til tilstanden selv, $i \to i$, om ikke på anden måde så efter 0 trin.

Hvis man både kan komme fra i til j og fra j til i, altså både $i \to j$ og $j \to i$, vil vi sige, at tilstandene *kommunikerer*, og skrive $i \sim j$. Dette er en *ækvivalensrelation*: (1) Den er *refleksiv*, da altid $i \sim i$ efter ovennævnte konvention. (2) At den er *symmetrisk*, altså $i \sim j \Rightarrow j \sim i$, følger direkte af definitionen. (3) At den er *transitiv*, $i \sim j$, $j \sim k \Rightarrow i \sim k$, ses således: Når $i \to j$ og $j \to k$, har man $i \to k$; dette ses af, at for $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{jk}^{(n)} > 0$ er

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{\ell} p_{i\ell}^{(m)} p_{\ell k}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0\,;$$

alternativt kan man sige, at når der er en rute fra i til j og en rute fra j til k, kan de to ruter lægges i forlængelse af hinanden; da der tilsvarende også er en rute den modsatte vej, er transitiviteten vist. Det er velkendt, at der svarende til ækvivalensrelationen er en *klasseinddeling* af mængden af tilstande. Klasserne består af de tilstande, der kommunikerer indbyrdes.

En klasse siges at være *lukket*, såfremt alle overgangssandsynligheder fra tilstande i klassen til tilstande uden for klassen er nul, altså hvis der ikke er nogen rute, der fører ud af klassen. Når man er kommet ind i en lukket klasse, kan denne ikke senere forlades. Et specielt tilfælde får man, når den lukkede klasse kun består af en enkelt tilstand. En sådan tilstand kaldes *absorberende*. Den angives i overgangsdiagrammer ved et kvadrat. Man kan sige, at processen stopper, hvis den når en absorberende tilstand.

Den anden mulighed er, at der er mindst én positiv overgangssandsynlighed fra en tilstand i klassen til en tilstand udenfor. I så fald siges klassen at være *åben*. Givet start i en vilkårlig tilstand i en åben klasse er der positiv sandsynlighed for at forlade klassen, da der er en rute, der fører ud. Når man først har forladt en åben klasse, kan man aldrig vende tilbage, da tilstande i klassen ellers ville kommunikere med tilstande udenfor i strid med definitionen på en klasse.

Vi vil nu vise følgende vigtige sætning:

- *En endelig Markov-kæde har mindst én lukket klasse.*

Bevis: Lad os først vælge en klasse; hvis den er lukket, er beviset ført. Ellers er der en overgang til en anden klasse; hvis den nye klasse er lukket, er beviset ført. Man kan ikke fortsætte med at gå fra den ene åbne klasse til den anden, da man aldrig kan vende tilbage til en klasse, man tidligere har været i. Da der kun er endelig mange klasser, må ruten før eller senere føre til en lukket klasse. ■

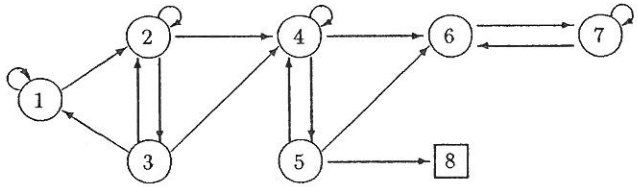
En Markov-kæde, hvor alle tilstandene kommunikerer indbyrdes, består åbenbart af en enkelt lukket klasse. En sådan Markov-klasse kaldes *irreducibel*.

Eksempel 4.2. Markov-kæden i eksempel 3.4 har en enkelt lukket klasse, er altså irreducibel. Markov-kæderne i eksemplerne 3.3 og 4.1 består begge af en åben klasse med 3 tilstande og en absorberende tilstand. □

Eksempel 4.3. Lad en Markov-kæde med tilstandene $1, 2, \ldots, 8$ have overgangsmatricen:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stjernerne står for positive overgangssandsynligheder; til klassifikationen er det unødvendigt at kende den eksakte værdi. Det tilsvarende overgangsdiagram er:



Der er to åbne klasser, {1,2,3} og {4,5}, og to lukkede klasser, {6,7} og {8}. (Tilstanden 8 er absorberende.) □

I forbindelse med diskussionen om egenskaber ved en Markov-kædes tilstande skal vi nu indføre begrebet (diskret) *ventetid*. En stokastisk variabel

T, der angiver antal trin, indtil en bestemt hændelse indtræffer, kaldes en ventetid. Den kan antage værdier blandt $0, 1, 2, \ldots$, samt ∞. Vi sætter $T = \infty$, når den pågældende hændelse aldrig indtræffer. Et eksempel er en Markov-kæde med to absorberende tilstande a og b, hvor T angiver ventetiden indtil absorption i tilstanden a. $T = \infty$ indtræffer nødvendigvis, hvis der sker absorption i tilstanden b. Hvis $P(T = \infty) = 0$, siges T at være en *egentlig* ventetid; hvis $P(T = \infty) > 0$, siges T at være en *uegentlig* ventetid.

For uegentlige ventetider T er naturligvis middelventetiden $E(T) = \infty$; men det kan også lade sig gøre, at $E(T) = \infty$ for egentlige ventetider (se opgave 4.5).

Til at afgøre, om ventetiden T er egentlig, har vi følgende regel:[4]

- *Hvis $P(T > n) \to 0$ for $n \to \infty$, så er T egentlig.*

Vi får også brug for en formel for middelværdien af egentlige ventetider. Der gælder:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} P(T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(T = k) \\ &= E(T). \end{aligned}$$

Ved et første lighedstegn har vi benyttet, at $P(T = \infty) = 0$. (Bemærk, at selv om symbolet ∞ står som en øvre grænse i summationerne, er denne værdi ikke medtaget!) Ved det næste lighedstegn har vi ombyttet summationsordenen. Man kan finde de rigtige grænser ved fx at plotte de relevante punkter i et (n, k)-koordinatsystem. Vi har altså formlen for middelventetider:

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n). \tag{4.1}$$

Formlen (men ikke beviset) gælder også for uegentlige ventetider (se opgave 4.6).

[4] Reglen kan udledes ud fra den tællige additivitet af sandsynligheder.

Eksempel 4.4. Vi vil give en ny analyse af den geometriske fordeling. Betragt Bernoulli-forsøg med $P(A) = p$, hvor $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, og lad T betegne ventetiden til første gang, A indtræffer. Så er $P(T > n) = q^n \to \cancel{\infty}$ 0, hvilket viser, at T er ~~endelig~~ egentlig. Endvidere fås:

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

i overensstemmelse med det tidligere fundne. □

Lad en tilstand j være givet, og lad T_j betegne ventetiden indtil første ankomst til tilstanden j. Svarende til start i tilstanden i indfører vi symbolet $f_{ij}^{(n)}$ (f = første gang);

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P(T_j = n \mid X_0 = i) \\ &= P(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Vi ser, at $f_{ij}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ angiver fordelingen af antal trin til første overgang fra i til j. Endvidere sætter vi:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_j < \infty \mid X_0 = i). \tag{4.2}$$

f_{ij} angiver sandsynligheden for, at der nogen sinde sker en overgang fra i til j. For middelventetiden μ_{ij} kan vi benytte formel (4.1):

$$\mu_{ij} = E(T_j \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_j > n \mid X_0 = i).$$

En speciel situation har vi, når $j = i$. Her angiver $f_{ii}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ fordelingen af første tilbagekomst til tilstanden i, givet start i i. f_{ii} angiver sandsynligheden for nogen sinde at vende tilbage. Hvis der vendes tilbage, kan vi se på, om det sker endnu engang. Her er f_{ii}^2 sandsynligheden for mindst 2 tilbagekomster.[5] Mere generelt er f_{ii}^n sandsynligheden for, at der mindst n gange vendes tilbage. (Bemærk, at der er tale om potensopløftning – ingen parentes om n.) Nu er det velkendt, at for $0 \leq f_{ii} < 1$ gælder $f_{ii}^n \to 0$ for $n \to \infty$. Vi kan altså være sikre på, at der højst indtræffer et endeligt antal tilbagekomster. Er derimod $f_{ii} = 1$, er også $f_{ii}^n = 1$ for alle n. Vi er

[5] Dette synes intuitivt klart. Et matematisk bevis bygger på den såkaldte *stærke Markov-egenskab*, hvor det tidspunkt, man betinger mht., kan være stokastisk.

da sikre på, at der sker uendelig mange tilbagekomster. Vi klassificerer nu tilstandene efter tilbagekomstegenskaben.

Hvis $0 \leq f_{ii} < 1$, altså uegentlig ventetid til tilbagekomst, siges tilstanden i at være *transient* (forbigående). Der er da positiv sandsynlighed for, at der ved start i tilstanden i ikke vendes tilbage, og der vil aldrig være mere end endelig mange tilbagekomster.

Hvis $f_{ij} = 1$, altså egentlig ventetid for tilbagekomst, siges tilstanden i at være *persistent* (vedvarende).[6] Ved start i tilstanden i vendes altid tilbage, oven i købet uendelig mange gange.

Et specielt tilfælde har vi, når $f_{ii} = 1$, men $\mu_{ii} = \infty$, altså sikker tilbagekomst, men uendelig middelventetid. I så fald kaldes tilstanden i *nul-persistent*. For *endelige* Markov-kæder kan nul-persistente tilstande dog ikke forekomme.

Der skal nu vises et afgørende resultat for *endelige* Markov-kæder, nemlig at

(i) Alle tilstande i åbne klasser er transiente.

(ii) Alle tilstande i lukkede klasser er persistente.

Til beviset benyttes et resultat, der i sig selv har betydelig interesse:

(iii) Ved start i en åben klasse er ventetiden til ankomst til lukket klasse en egentlig ventetid med endelig middelværdi.

Bevis: Lad først tilstanden i tilhøre en åben klasse. Vi ved da, at der eksisterer en tilstand j uden for klassen, så $i \to j$. Lad m betegne det mindste antal trin, der i overgangsdiagrammet giver en rute fra i til j. Denne rute har en sandsynlighed $\alpha > 0$. Da ruten er kortest mulig, kan der ikke være tale om tilbagekomst til i undervejs. Følgelig er sandsynligheden for, at der ved start i tilstanden i ikke sker nogen tilbagekomst (hvis man kommer til j, kan man jo ikke komme tilbage) mindst α, altså $1 - f_{ii} \geq \alpha > 0$. Tilstanden er derfor transient, og (i) er bevist.

Lad $\mathcal{O}$ betegne foreningsmængden af alle åbne klasser og $\mathcal{C}$ foreningsmængden af alle lukkede klasser. Lad $T_{\mathcal{C}}$ betegne ventetiden, indtil en lukket klasse nås. Vi vil vise, at uanset starttilstand vil $T_{\mathcal{C}}$ være en egentlig ventetid – oven i købet med endelig middelværdi. For enhver tilstand $i \in \mathcal{O}$ er der en rute, der fører ud af i's klasse. Hvis ruten går til en anden åben klasse, kan den videreføres ud af den. Da der kun er endelig mange klasser, og mindst én er lukket (se side 27), må der eksistere en rute fra i til en lukket klasse.

[6] I litteraturen forekommer også betegnelsen *rekurrent* (tilbagevendende).

For alle $i \in \mathcal{O}$ vælges en rute til $\mathcal{C}$; lad den bestå af m_i trin og lad dens sandsynlighed være $\alpha_i > 0$. Lad m betegne det største af tallene m_i, $i \in \mathcal{O}$, og lad $\alpha > 0$ betegne det mindste af tallene α_i, $i \in \mathcal{O}$. For alle $i \in \mathcal{O}$ er da

$$P(T_{\mathcal{C}} \leq m \mid X_0 = i) \geq \alpha_i \geq \alpha$$

og dermed

$$P(T_{\mathcal{C}} > m \mid X_0 = i) = \sum_{j \in \mathcal{O}} p_{ij}^{(m)} \leq 1 - \alpha.$$

Videre er

$$\begin{aligned} P(T_{\mathcal{C}} > 2m \mid X_0 = i) &= \sum_{j \in \mathcal{O}} p_{ij}^{(m)} P(T_{\mathcal{C}} > 2m \mid X_0 = i, X_m = j) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{O}} p_{ij}^{(m)} P(T_{\mathcal{C}} > m \mid X_0 = j) \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{O}} p_{ij}^{(m)} (1 - \alpha) \\ &\leq (1 - \alpha)^2. \end{aligned}$$

Ved induktion ses, at

$$P(T_{\mathcal{C}} > rm \mid X_0 = i) \leq (1 - \alpha)^r.$$

Ved at lade $r \to \infty$ ses, at $T_{\mathcal{C}}$ er en egentlig ventetid; altså vil Markov-kæden med sikkerhed før eller senere nå en lukket klasse (og her forbliver den). Til en vurdering af middelventetiden har vi for $rm \leq n < (r+1)m$

$$P(T_{\mathcal{C}} > n \mid X_0 = i) \leq P(T_{\mathcal{C}} > rm \mid X_0 = i),$$

og dermed

$$\begin{aligned} E(T_{\mathcal{C}} \mid X_0 = i) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_{\mathcal{C}} > n \mid X_0 = i) \\ &= m \sum_{r=0}^{\infty} P(T_{\mathcal{C}} > rm \mid X_0 = i) \\ &\leq m \sum_{r=0}^{\infty} (1 - \alpha)^r = \frac{m}{\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Dermed er hjælperesultatet (iii) vist.

Lad dernæst tilstanden i tilhøre en lukket klasse. Da denne klasse ikke kan forlades, kan vi antage, at Markov-kæden udelukkende består af denne klasse (altså er irreducibel). For at vise, at i er persistent, benytter vi et lille kneb, så vi kan udnytte det netop viste. Vi indfører en modificeret Markov-kæde, hvor vi lader tilstanden i være absorberende, hvorimod alle overgangssandsynlighederne p_{jk}, hvor $j \neq i$, forbliver intakte. Ved det første trin beholder vi dog overgangssandsynlighederne p_{ij}. Tilstandene bortset fra i udgør da én eller flere åbne klasser i den modificerede Markov-kæde, og ventetiden T_i til tilbagekomst til i, givet start i i, svarer til $T_{\mathcal{C}}$ ovenfor (bortset fra, at det første trin giver lidt knas, hvilket kun får kvantitativ, ikke kvalitativ betydning). T_i er altså en egentlig ventetid med endelig middelværdi. Vi har vist, at tilstanden i er persistent (og endvidere ikke nul-persistent). ■

OPGAVER

4.1 Nedenfor er strukturen i 3 overgangsmatricer givet. Tegn overgangsdiagrammer, og benyt dem til at klassificere tilstandene.

$$\text{(a)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

4.2 $*$ Angiv fordelingen $f_{11}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ for nedenstående Markov-kæde. Undersøg, om fordelingen er egentlig, og angiv i benægtende fald f_{11}.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 * Samme spørgsmål som i den foregående opgave. Angiv også middeltilbagevendingstiden μ_{11}.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4.4 * Antag, at en Markov-kæde har k tilstande. Vis, at hvis der for to tilstande i og j gælder, at der eksisterer et n, så $p_{ij}^{(n)} > 0$, så kan vi antage, at $n \leq k-1$.

4.5 Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(Vink: For den første uendelige række opspaltes leddene i partialbrøker, hvorved summen fra 1 til N teleskoperer; for den anden fås ved arealbetragtning

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx\,.)$$

Lad en ventetid T have fordelingen bestemt ved

$$P(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vis, at T er en egentlig ventetid med $E(T) = \infty$.

4.6 Vis, at for uegentlige ventetider er

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) = \infty.$$

4.7 For en transient tilstand i skal N_{ii} betegne antallet af tilbagekomster til i, givet start i i. Vis, at

$$E(N_{ii}) = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}}.$$

(Vink: N_{ii} er geometrisk fordelt.)

5 Periodicitet

Lad os igen se på eksempel 3.3. Som tidligere nævnt udgør rummene (tilstandene) 1, 2 og 3 en åben klasse (og er derfor transiente). Antag fx start i rum 1. Så længe rotten bliver i klassen (ikke finder rum 4), kan den kun være i rum 1 efter et lige antal trin og i rummene 2 og 3 efter et ulige antal trin. Vi siger, at klassen har perioden 2. Tilsvarende ses i opgave 3.4, at

rotten ved start i rum 1 kun kan være i rummene 1 og 4 efter et lige antal trin og kun i rummene 2 og 3 efter et ulige antal trin. Da Markov-kæden her er irreducibel, siger vi, at selve Markov-kæden har perioden 2. Vi skal nu se på, hvordan man mere generelt definerer perioder i Markov-kæder.

Som bekendt svarer $p_{ij}^{(n)} > 0$ til, at der i overgangsdiagrammet eksisterer en rute af længde n fra tilstand i til tilstand j. Formlen

$$p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$$

svarer til, at hvis der er en rute af længde m fra i til j og en rute af længde n fra j til k, så kan disse ruter lægges i forlængelse af hinanden og derved give en rute af længde $m+n$ fra i til k. Vi definerer $R(i,j)$ som mængden af trin, for hvilke der eksisterer en rute fra i til j, altså:

$$R(i,j) = \{n > 0 \mid p_{ij}^{(n)} > 0\}.$$

Specielt er $R(i,i)$ mængden af mulige tilbagekomsttrin ved start i tilstand i.

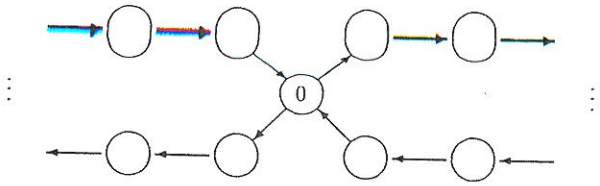
Vi benytter $R(i,i)$ til at definere *perioden* for tilstanden i. Kun i ét tilfælde er $R(i,i)$ tom, nemlig når i's klasse kun består af i selv, og tilstanden med sandsynlighed 1 straks forlades. Ellers defineres perioden d_i som største fælles divisor for tallene i $R(i,i)$, altså:

$$d_i = \text{sfd}\, R(i,i).$$

I de to rotteeksempler er $R(1,1) = \{2, 4, 6, \ldots\}$ med største fælles divisor 2.

Det første, vi vil vise, er, at alle tilstandene i en klasse K har samme periode. Lad i og j være to tilstande i K, og lad $a \in R(i,j)$, $b \in R(j,i)$. Der er altså en rute fra i til j af længde a og én fra j til i af længde b. Den sammensatte rute viser, at $a + b \in R(i,i)$, hvorfor $d_i \mid (a+b)$. (symbolet $\mid$ læses »går op i«.) For ethvert $n \in R(j,j)$ er der en rute fra j og tilbage til j af længde n. De 3 ruter kan lægges i forlængelse af hinanden, så vi får en rute fra i og tilbage til i af længde $a+n+b$. Vi har $a+b+n \in R(i,i)$, hvorfor $d_i \mid (a+b+n)$. Ved subtraktion fås $d_i \mid n$; altså går d_i op i alle tal i $R(j,j)$, hvilket medfører, at $d_i \leq d_j$, da d_j er størst blandt de fælles divisorer for tallene i $R(j,j)$. Ved at ombytte i og j i argumentet ses, at også $d_j \leq d_i$; altså er $d_i = d_j$. Vi lader d betegne den fælles periode for tilstandene i K. Hvis specielt $d = 1$, siges K at være *aperiodisk*.

Eksempel 5.1. Lad en Markov-kæde have følgende overgangsdiagram:



Sløjfen til højre skal bestå af a tilstande, og sløjfen til venstre skal bestå af b tilstande (begge inkl. tilstanden 0). Bortset fra de to muligheder for fortsættelse fra tilstand 0 er denne Markov-kæde deterministisk. Den er klart irreducibel. Idet de to sløjfer har perioderne a og b, er Markov-kædens periode $d = \text{sfd}\{a, b\}$. □

Vi skal se på, for hvilke antal trin overgang fra tilstand i til tilstand j er mulig i en periodisk klasse med periode d. Lad $a, b \in R(i,j)$ og $c \in R(j,i)$. Så vil både $a+c$, $b+c \in R(i,i)$, altså $d \mid (a+c)$, $d \mid (b+c)$, hvoraf ved subtraktion fås $d \mid (b-a)$. Dette viser, at a og b giver samme rest ved division med d. Alle tal i $R(i,j)$ er altså kongruente modulo d. Vi kan følgelig videreklasseinddele klassen K i de såkaldte *cykliske underklasser* $K_0, K_1, \ldots, K_{d-1}$, hvor (idet tilstanden i tages som udgangspunkt)

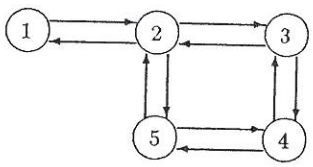
$$K_r = \{j \in K \mid n \in R(i,j) \;\Rightarrow\; n \equiv r \pmod{d}\}.$$

Vi ser, at man kører rundt i de cykliske underklasser i rækkefølgen:

$$K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_{d-1} \longrightarrow K_0 \longrightarrow \ldots$$

(hvis K er en åben klasse naturligvis kun så længe, man forbliver i klassen). Hvis man kun observerer Markovkæden for hvert d'te trin, vil de cykliske underklasser være isolerede fra hinanden og aperiodiske i den nye tidsregning.

Eksempel 5.2. Lad en irreducibel Markov-kæde have følgende overgangsdiagram:



Vi ser, at man ved start i tilstand 1 kan vende tilbage efter alle lige antal trin (og kun dem), hvorfor perioden er $d = 2$. De to cykliske underklasser er $K_0 = \{1, 3, 5\}$ og $K_1 = \{2, 4\}$. □

Vi vil nu bevise:

Regularitetskriteriet. *En Markov-kæde er regulær, hvis og kun hvis den er irreducibel og aperiodisk.*

Hertil får vi brug for et resultat fra den elementære talteori:

- *Lad d betegne største fælles divisor for de hele tal $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Så eksisterer der hele tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$, så d kan skrives som en linearkombination:*

$$d = c_1 n_1 + c_2 n_2 + \ldots + c_k n_k.$$

Bevis: Beviset er konstruktivt[7] og benytter Euklids algoritme. Først foretages successive heltalsdivisioner med rest ud fra n_1 og n_2, indtil divisionen går op:

$$\begin{aligned}
n_1 &= q_1 n_2 + r_1, & 0 \le r_1 < n_2,\\
n_2 &= q_2 r_1 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1,\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_{m-2} &= q_m r_{m-1} + r_m, & 0 \le r_m < r_{m-1},\\
r_{m-1} &= q_{m+1} r_m.
\end{aligned}$$

Vi har da $d = r_m = \text{sfd}\{n_1, n_2\}$. Ved successiv baglæns substitution får man skrevet r_k som en linearkombination af n_1 og n_2. Proceduren gentages med r_k og n_3 osv. ■

Vi illustrerer med et eksempel.

Eksempel 5.3. Lad tallene 30, 42 og 70 være givne. Vi vil bestemme deres største fælles divisor d og en linearkombination. Først ses på 42 og 70. Vi har ifølge Euklid:

$$\begin{aligned}
70 &= 1 \cdot 42 + 28,\\
42 &= 1 \cdot 28 + 14,\\
28 &= 2 \cdot 14,
\end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}
14 &= 42 - 28\\
&= 42 - (70 - 42)\\
&= 2 \cdot 42 - 70.
\end{aligned}$$

Dette viser, at 14=sfd{42, 70} og giver en linearkombination. Dernæst ses på 14 og 30:

$$\begin{aligned}
30 &= 2 \cdot 14 + 2,\\
14 &= 7 \cdot 2,
\end{aligned}$$

[7] Bevisgangen kan altså bruges ved konkrete anvendelser.

og dermed

$$\begin{aligned} 2 &= 30 - 2 \cdot 14 \\ &= 30 - 2 \cdot (2 \cdot 42 - 72), \\ &= 30 - 4 \cdot 42 + 2 \cdot 70. \end{aligned}$$

Vi har vist, at 2=sfd{30, 42, 70}, og angivet en linearkombination. □

Bevis for regularitetssætningen: Lad en irreducibel, aperiodisk Markov-kæde være givet; vi skal vise, at den er regulær. Betragt en tilstand i. Der må eksistere tal $n_1, n_2, \ldots, n_k \in R(i,i)$, der er indbyrdes primiske (dvs. har 1 som største fælles divisor), og dermed er der hele *positive* tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$, så

$$1 = c_1 n_1 + \ldots + c_\ell n_\ell - c_{\ell+1} n_{\ell+1} - \ldots - c_k n_k,$$

idet vi har udeladt evt. n_i med koefficient nul og samlet dem med positive koefficienter forrest. Vi kan skrive $1 = a - b$, hvor

$$a = c_1 n_1 + \ldots + c_\ell n_\ell, \qquad b = c_{\ell+1} n_{\ell+1} + \ldots + c_k n_k.$$

Vi indser, at $a \in R(i,i)$, da der er ruter af længder $n_1, \ldots, n_\ell$ fra i til i; disse gennemløbes hhv. $c_1, \ldots, c_\ell$ gange, hvorved vi i alt får en rute af længde a fra i til i. Tilsvarende indses, at $b \in R(i,i)$. For alle hele n kan vi skrive:

$$n = qb + r, \qquad 0 \le r < b,$$

og for $n \ge b^2$ er $q \ge b > r$. Vi har da:

$$n = qb + r(a-b) = ra + (q-r)b.$$

Vi ser, at $n \in R(i,i)$ for $n \ge b^2$, da vi har en rute af længde n fra i til i svarende til, at ruten af længde a gennemløbes r gange (for $r = 0$ slet ikke), og ruten af længde b dernæst gennemløbes $q - r > 0$ gange. Vi har vist, at der eksisterer et tal N_{ii} (nemlig b^2), så at der for alle $n \ge N_{ii}$ gælder $n \in R(i,i)$ og dermed $p_{ii}^{(n)} > 0$.

For to tilstande i og j er der et m, så vi har en rute af længde m fra i til j. Vi sætter $N_{ij} = N_{ii} + m$ og får for alle $n \ge N_{ij}$ en rute af længde n fra i til j, idet vi først vælger en rute af længde $n - m \ge N_{ii}$ fra i til i og dernæst den nævnte rute af længde m fra i til j. For alle $n \ge N_{ij}$ har vi altså $p_{ij}^{(n)} > 0$.

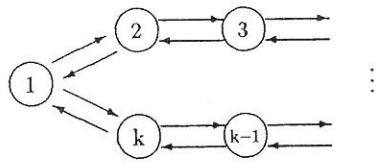
Lad N betegne det største af de endelig mange tal N_{ij}. For $n \ge N$ er alle $p_{ij} > 0$; altså er Markov-kæden regulær.

Omvendt er de to betingelser nødvendige for, at Markov-kæden kan være regulær. Det indses indirekte: Hvis Markovkæden ~~ikke~~ er reducibel, altså har

flere klasser, er der tilstande i og j, hvor overgang er umulig, altså $p_{ij}^{(n)} = 0$ for alle n. Hvis Markov-kæden er periodisk, kan overgange fra i til j kun ske efter et antal trin n, der giver den rigtige rest ved division med d, svarende til hvilke cykliske underklasser i og j ligger i. Hvis fx $i \in K_0$, $j \in K_1$, er $p_{ij}^{(n)} > 0$ kun muligt for $n \equiv 1 \pmod{d}$. ■

OPGAVER

5.1 * En irreducibel Markov-kæde har overgangsdiagrammet:



Bestem perioden som funktion af k.

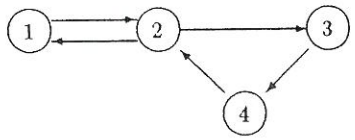
5.2 Lad tilstandene i eksempel 5.2 være ordnede efter cykliske underklasser, fx rækkefølgen 1, 3, 5, 2, 4. Angiv strukturen af overgangsmatricen.

5.3 Lad en irreducibel Markov-kæde have perioden d. Opskriv tilstandene ordnede efter de cykliske klasser. Hvad kan man sige om strukturen af overgangsmatricen?

5.4 * Vis, at tallene 30, 42, 70 og 105 er indbyrdes primiske, og angiv 1 som en linearkombination af disse fire tal.

5.5 * Find den største fælles divisor for tallene 63, 66 og 75, og angiv en linearkombination.

5.6 * En regulær Markov-kæde har overgangsdiagrammet:

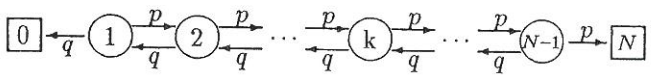


Beregn et passende udvalg af $R(i,j)$. Find det mindste n, for hvilket n-trinsovergangsmatricen $\mathbf{P}^n$ udelukkende har positive elementer. (Metode 1: Beregn samtlige 16 mængder $R(i,j)$. Metode 2: Beregn sucessivt strukturerne af $\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots$. Hvad er simplest?)

5.7 Besvar spørgsmålene i den foregående opgave for Markov-kæden i opgave 3.5 (3.6).

6 Det klassiske ruinproblem

Vi betragter et spil, hvor en person A har sandsynligheden p for gevinst og sandsynligheden $q = 1 - p$ for tab. Der spilles om 1 kr. ad gangen. I begyndelsen har A en kapital på k kr. Spillet slutter med gevinst, hvis A opnår en kapital på N kr., og med ruin, hvis kapitalen er opbrugt. Spillet kan beskrives som en Markov-kæde med nedenstående overgangsdiagram:



Tilstandene 0 og N er absorberende. Tilstandene $1, 2, \ldots, N-1$ udgør en åben klasse med periode 2.

En alternativ beskrivelse får man, idet man antager, at en partikel bevæger sig ét trin ad gangen frem eller tilbage med de givne sandsynligheder og uafhængigt af positionen. En sådan proces kaldes et *random walk*.[8] Vi taler om her om et endimensionalt random walk med 2 absorberende barrierer.

I forbindelse med dette spil/random walk er der især to problemer, vi skal beskæftige os med:

(i) Hvad er sandsynligheden for, at A ruineres?

(ii) Hvad er middelventetiden, indtil spillet afsluttes?

Ifølge teorien (udsagn (iii) på side 31) ved vi, at en Markov-kæde med sandsynlighed 1 før eller senere når en lukket klasse, altså her en absorberende tilstand, og at middelventetiden, indtil dette sker, er endelig. Vi skal se på, hvordan man beregner de relevante størrelser.

Lad r_k betegne sandsynligheden for, at A ruineres, når han har en kapital på k. Ruinmuligheden inddeles i to tilfælde: Enten vinder han i første spil og ruineres derefter; sandsynligheden er pr_{k+1}. Eller også taber han i første spil og ruineres derefter; sandsynligheden er qr_{k-1}. Ifølge reglen om den totale sandsynlighed fås i alt

$$r_k = p\,r_{k+1} + q\,r_{k-1}. \tag{6.1}$$

Ovennævnte argumentation gælder uden videre for $k = 2, 3, \ldots, N-2$ og desuden for $k = 1$ og $k = N-1$, hvis vi sætter

$$r_0 = 1, \qquad r_N = 0. \tag{6.2}$$

[8] På dansk har man ikke fundet et god oversættelse, på svensk »slumpmässig promenad«.

Vi kalder (6.1) en homogen lineær *differensligning* af 2. orden; den er *homogen*, da alle led indeholder den ubekendte r_i; den er af *2. orden*, da fx hvert r_{k+1} er udtrykt ved de to foregående værdier r_k og r_{k-1}. (6.2) kaldes randbetingelser. En differensligning løses efter samme princip som en tilsvarende differentialligning: Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er mængden af linearkombinationer af to lineært uafhængige løsninger. De arbitrære koefficienter bestemmes af randbetingelserne.

Antag først, at $p \neq q$ (spil med »bias«, random walk med drift). Ved at prøve med løsninger af formen $r_k = x^k$ ser man let, at der er to lineært uafhængige løsninger $r_k = 1$ og $r_k = (q/p)^k$. Den fuldstændige løsning til (6.1) er derfor

$$r_k = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Ved indsættelse af randbetingelserne (6.2) fås

$$A + B = 1, \qquad A + B\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0,$$

som ved løsning og indsættelse giver

$$r_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.3}$$

Sandsynligheden for, at A opnår de N kr., er tilsvarende $1 - r_k$. Dette følger af teorien (side 31), men kan også vises direkte (opgave 6.1).

For $p = q = \frac{1}{2}$ (fair spil, symmetrisk random walk) er de to oprindelige løsninge ens og dermed ikke lineært uafhængige. Ved prøve ses, at $r_k = k$ i dette tilfælde er løsning, så den fuldstængige løsning bliver

$$r_k = A + Bk.$$

Ved indsættelse af randbetingelserne (6.2) fås

$$A = 0, \qquad A + BN = 0,$$

som ved løsning og indsættelse giver

$$r_k = 1 - \frac{k}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.4}$$

Man kan også udlede (6.4) ud fra (6.3) ved at lade $p \to \frac{1}{2}$ (opgave 6.2).

Lad den stokastiske variabel G angive A's gevinst. Spillet siges at være *fair*, såfremt middelgevinsten $E(G) = 0$. Med sandsynlighed r_k er $G = -k$ (altså tab), og med sandsynlighed $1 - r_k$ er $G = N - k$. Vi får

$$E(G) = -kr_k + (N-k)(1-r_k),$$

der omformes til

$$E(G) = N(1-r_k) - k. \tag{6.5}$$

For $p = \frac{1}{2}$ fås ved indsættelse af (6.4), at $E(G) = 0$. Derimod fås for $p < \frac{1}{2}$ altid $E(G) < 0$, og for $p > \frac{1}{2}$ fås altid $E(G) > 0$ (opgave 6.3). Spørgsmålet, om at spil er fair eller ej, kan altså ikke ændres ved kapitalens størrelse.

Lad os dernæst se på, hvad der sker, når indsatserne ændres. Antag fx, at der kun spilles om den halve indsats hver gang. Sandsynligheden for ruin svarer til, at A i det oprindelige spil har $2k$ kr. og ønsker at opnå kapitalen $2N$ kr. Den nye ruinsandsynlighed r_k^* er (for $p \neq \frac{1}{2}$)

$$r_k^* = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2N} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2k}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2N} - 1} = r_k \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{N} + \left(\frac{q}{p}\right)^{k}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{N} + 1}.$$

For $p < \frac{1}{2}$ er $r_k^* > r_k$, da faktoren, som r_k multipliceres med, er større end 1. For $p > \frac{1}{2}$ er tilsvarende $r_k^* < r_k$. Hvis indsatsen i stedet fordobles, gælder de omvendte uligheder. Sammenfattende kan man udtrykke det i følgende regel om spil (og andre konkurrencesituationer):

- *Ved et ufordelagtigt spil skal man satse så meget som muligt.*[9]
- *Ved et fordelagtigt spil skal man spille så forsigtigt som muligt.*

Vi vil også beregne den forventede varighed af spillet. Idet T er spillets varighed, og X_0 begyndelsestilstanden, sætter vi

$$\mu_k = E(T \mid X_0 = k).$$

μ_k er altså middelventetiden af spillet ved start i tilstand k. Vi ved fra teorien (se side 31), at $\mu_k < \infty$. Med sandsynlighed p gås over i tilstand $k+1$, hvorfra middelventetiden er μ_{k+1}, og med sandsynlighed q gås over i tilstand $k-1$, hvorfra middelventetiden er μ_{k-1}. Da der samtidigt er gået 1 tidsenhed, fås

$$\mu_k = p\mu_{k+1} + q\mu_{k-1} + 1. \tag{6.6}$$

[9] Hvis man er nødt til at spille.

Dette skal sammenholdes med randbetingelserne

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_N = 0. \tag{6.7}$$

Vi har i (6.6) en inhomogen lineær differensligning af 2. orden. Differensen mellem to løsninger tilfredsstiller den tilsvarende homogene ligning, som er identisk med (6.1). Vi får derfor den fuldstændige løsning ved til en partikulær løsning at addere samtlige løsninger til den homogene ligning.

For $p \neq \frac{1}{2}$ prøver vi med en løsning af formen $\mu_k = Ck$ og finder, at $C = 1/(q-p)$. Altså er den fuldstændige løsning

$$\mu_k = \frac{k}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Ved indsættelse af randbetingelserne (6.7) fås

$$A + B = 0, \qquad A + B\left(\frac{q}{p}\right)^N = -\frac{N}{q-p},$$

som ved løsning og indsættelse giver

$$\mu_k = \frac{k}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.8}$$

For $p = \frac{1}{2}$ er $\mu_k = Ck$ allerede homogen løsning. Vi prøver derfor med $\mu_k = Ck^2$ og finder, at $\mu_k = -k^2$. Den fuldstændige løsning er

$$\mu_k = -k^2 + A + B\cancel{\ell}\,k,$$

som ved indsættelse af randbetingelserne giver

$$\mu_k = k(N-k), \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.9}$$

OPGAVER

6.1 Find ved bogstavombytning i (6.3) sandsynligheden for, at A's modspiller B ruineres. Kontrollér, at summen af de to sandsynligheder er 1.

6.2 Vis, at (6.4) fås som et grænsetilfælde af (6.3). (Vink: Sæt $x = q/p$ og benyt l'Hospitals regel.)

6.3 * Vis, at $E(G)$ i (6.5) er negativ for $p < \frac{1}{2}$ og positiv for $p > \frac{1}{2}$.

6.4 En spiller har 4 kr. og ønsker at opnå 16 kr. uden at blive ruineret. Find sandsynligheden for, at det lykkes, når $p = 0.4$, 0.5 og 0.6, og når indsatsen er 1 kr., 2 kr. og 4 kr. Find i alle 9 tilfælde den forventede varighed af spillet.

6.5 * A har 100 kr. og skal absolut have 1000 kr. hurtigt. Han kan deltage i et spil, hvor han har sandsynligheden $p = 0.49$ for at vinde. Hvad er sandsynligheden for, at han når sit mål, når indsatsen er 1 kr., 10 kr. og 100 kr.? Hvor længe skal A i middel vente på sin skæbne? Samme spørgsmål for $p = 0.51$.

6.6 * Antag, at der i ruinproblemet også er mulighed for uafgjort. Hvis sandsynlighederne for A's gevinst, tab og uafgjort er p, q og r på en sådan måde, at

$$p^* = \frac{p}{1-r}, \qquad q^* = \frac{q}{1-r}$$

holdes faste, skal man analysere indflydelsen af r på sandsynligheden for ruin og på spillets forventede varighed.

6.7 * Antag (som i eksempel 4.1), at tilstanden 0 er en reflekterende barriere, hvormed menes, at overgang fra 0 til 1 har sandsynlighed 1. I så fald er der sandsynlighed 1 for, at man før eller senere når tilstand N. Find spillets forventede varighed, (i) for $N = 3$ og alle p og (ii) for alle N og $p = \frac{1}{2}$.

6.8 I et spil vinder A 2 kr. med sandsynlighed p og taber 1 kr. med sandsynkighed $q = 1 - p$. Spillet slutter, når A har opnået N kr. (muligvis N+1 kr.) eller er ruineret. Opstil differensligning og randbetingelser for ruinsandsynligheden r_k. Angiv 3 lineært uafhængige løsninger til differensligningen. (Vink: Prøv med $r_k = x^k$. Dette giver en tredjegradsligning, hvor $x = 1$ er rod. For $p = \frac{1}{3}$ er spillet fair. Da er 2 af rødderne sammenfaldende. Hvad er den tredje løsning?) Vis, at for $p = \frac{1}{3}$ er

$$r_k = \frac{(3N+1)(-2)^N - 3(-2)^N k - (-2)^k}{(3N+1)(-2)^N - 1}.$$

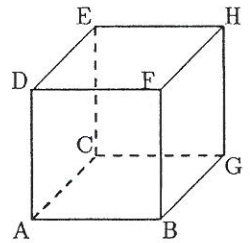
Kontrollér ved direkte udregning formlen for $N = 4$.

7 Absorberende Markov-kæder

Vi betragter en endelig Markov-kæde bestående af transiente tilstande og én eller flere absorberende tilstande, altså ingen lukkede klasser med mere end én tilstand. Fra teorien ((iii) side 31) ved vi, at der ved start i en transient

tilstand før eller senere nås en absorberende tilstand, og at middelventetiden er endelig. Inden vi udleder de generelle formler, skal vi se på et simpelt eksempel, hvor vi kan udnytte symmetrien. (Også det klassiske ruinproblem i afsnit 6 er et tilfælde, hvor det ikke er en fordel at benytte de generelle matrixformler.)

Eksempel 7.1. (Random walk på en terning) En partikel bevæger sig mellem de 8 hjørner på en terning, så den for hver tidsenhed flytter sig til et af de 3 nabohjørner, hver med sandsynlighed $\frac{1}{3}$. To diamentralt modsatte hjørner antages at være absorberende.



På figuren antages A og H at være absorberende. De øvrige tilstande udgør en åben klasse med periode 2. Der er fuld symmetri inden for hver af de to cykliske underklasser, altså mellem B, C og D hver for sig og mellem E, F og G hver for sig. Lad r_1 betegne sandsynligheden for absorption i A ved start i B, C eller D og r_2 sandsynligheden for absorption i A ved start i E, F eller G. Ved start i fx B kan partiklen enten straks absorberes i A eller gå til F eller G. Vi har da

$$r_1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} r_2.$$

Ved start i fx E kan partiklen enten straks absorberes i H eller gå til C eller D. Vi har da

$$r_2 = \tfrac{2}{3} r_1.$$

Af disse to ligninger fås

$$r_1 = \tfrac{3}{5}, \qquad r_2 = \tfrac{2}{5}.$$

Endvidere lader vi μ_1 betegne middelventetiden indtil absorption (i enten A eller H) ved start i B, C eller D og μ_2 middelventetiden ved start i E, F eller G. Ved et lignende ræsonnement fås, svarende til at man går én tidsenhed frem

$$\mu_1 = \tfrac{2}{3}\mu_2 + 1,$$

$$\mu_2 = \tfrac{2}{3}\mu_1 + 1,$$

med løsningen

$$\mu_1 = \mu_2 = 3.$$

I øvrigt giver symmetrien umiddelbart, at $\mu_1 = \mu_2$. □

Lad os gå over til at se på den generelle situation. Lad $\mathcal{T}$ betegne mængden af transiente tilstande, og lad deres antal være t. Lad $\mathcal{A}$ betegne mængden af absorberende tilstande, og lad deres antal være a. Ved en eventuel omordning sørger vi for, at de transiente tilstande nævnes først. Overgangsmatricen $\mathbf{P}$ (der er en $(t+a)\times(t+a)$-matrix) kan blokopdeles således:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} & \mathbf{P}_{\mathcal{T}\mathcal{A}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Her er $\mathbf{P}_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ en $t\times t$ matrix svarende til overgangene fra transient til transient tilstand og $\mathbf{P}_{\mathcal{T}\mathcal{A}}$ en $t\times a$ matrix svarende til overgangene fra transient til absorberende tilstand. I nederste venstre hjørne står $\mathbf{O}$ for en $a\times t$ nulmatrix, svarende til, at overgang fra absorberende tilstand til transient tilstand ikke finder sted. Endelig er $\mathbf{I}$ en $a\times a$ enhedsmatrix (1 i diagonalen, 0 udenfor) svarende til forbliven i de absorberende tilstande.

Vi lader r_{ij} betegne sandsynligheden for, givet start i den transiente tilstand i, at absorptionen sker i den absorberende tilstand j, altså

$$r_{ij} = P(X_n = j \text{ for } n \text{ stor nok} \mid X_0 = i), \quad i\in\mathcal{T},\ j\in\mathcal{A}.$$

(Faktisk er $r_{ij} = f_{ij}$ med notationen fra (4.1).) Lad os starte i tilstand $i\in\mathcal{T}$. Hvis tilstand $j\in\mathcal{A}$ skal nås, kan det ske enten direkte (med sandsynlighed p_{ij}) eller via en transient tilstand $k\in\mathcal{T}$, altså

$$r_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\in\mathcal{T}} p_{ik}r_{kj}, \quad i\in\mathcal{T},\ j\in\mathcal{A}. \tag{7.1}$$

Lad $\mathbf{R} = (r_{ij})$ betegne den $t\times a$ matrix, der angiver absorptionssandsynlighederne. Så kan (7.1) i matrixsprog skrives

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_{TA} + \mathbf{P}_{TT}\mathbf{R},$$

der omformes til

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT})\mathbf{R} = \mathbf{P}_{TA}. \tag{7.2}$$

Her er $\mathbf{I}$ en $t\times t$ enhedsmatrix. Man kan vise, at $\mathbf{I}-\mathbf{P}_{TT}$ har en invers matrix, hvorfor der er én og kun én matrix $\mathbf{R}$, der er løsning til (7.2). Ved numerisk beregning kan det dog normalt ikke svare sig at beregne $(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{TT})^{-1}$ for at finde $\mathbf{R}$.

Lad endvidere μ_i betegne middelventetiden til absorption (uanset hvilken absorberende tilstand), givet start i den transiente tilstand i. Idet T_A betegner selve ventetiden, har vi

$$\mu_i = E(T_{\mathcal{A}} \mid X_0 = i), \quad i\in\mathcal{T}.$$

Efter start i tilstand i går vi én tidsenhed frem. Hvis absorptionen er sket, er vi færdige. Ellers går vi over i en transient tilstand, hvorfra der ventes på absorption. Vi har da

$$\mu_i = \sum_{k\in\mathcal{T}} p_{ik}\mu_k + 1, \quad i\in\mathcal{T}. \tag{7.3}$$

Lad $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_t)$ betegne rækkevektoren bestående af de t middelventetider. Endvidere indføres $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, som er en rækkevektor med t 1-taller. Idet $(\ )^T$ betegner transposition, svarende til, at der i formlen skal stå søjlevektorer, kan (7.3) på matrixform skrives

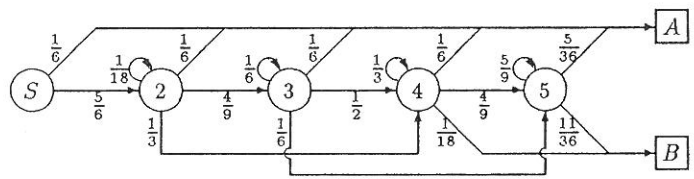
$$\boldsymbol{\mu}^T = \mathbf{P}_{TT}\boldsymbol{\mu}^T + \mathbf{1}^T,$$

der omformes til

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT})\boldsymbol{\mu}^T = \mathbf{1}^T. \tag{7.4}$$

Det kan nævnes, at disse formler også kan benyttes, når Markov-kæden har lukkede klasser bestående af mere end én tilstand, hvis man kun er interesseret i, hvilken lukket klasse der nås, og ikke det videre forløb inden for en lukket klasse. I så fald »klumper« man tilstandene i den lukkede klasse sammen til en enkelt absorberende tilstand.

Eksempel 7.2. En person X kaster 2 terninger ad gangen. To personer A og B spiller følgende spil ud fra X's kast: Hvis X kaster to ens, har A vundet. Der lægges mærke til, hvilke antal øjne, der er forekommet, og så snart alle 6 mulige antal øjne er forekommet, har B vundet. En tvetydig situation forekommer, hvis 5 forskellige antal øjne allerede er forekommet, og X kaster to ens med netop det manglende antal øjne. Lad os vedtage, at B vinder i denne situation. Vi kan beskrive spillet som en Markov-kæde bestående af tilstande svarende til det antal øjne, der hidtil er forekommet, altså 2, 3, 4 og 5, samt gevinst til A og til B. Endvidere defineres en starttilstand S. For at beregne overgangssandsynlighederne er det en fordel at tegne et 6×6-skema svarende til kast med to terninger. Overgangsdiagrammet ser således ud (vis det!):



De to delovergangsmatricer ser således ud:

$$\mathbf{P}_{TT} = \begin{array}{c} \\ S \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}_{TA} = \begin{array}{c} \\ S \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \frac{5}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vi løser samtidigt (7.2) og (7.4), der kan sammenfattes til

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT})(\mathbf{R} \mid \boldsymbol{\mu}^T) = (\mathbf{P}_{TA} \mid \mathbf{1}^T).$$

Da $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT}$ har lutter nuller under diagonalen, kan ligningssystemet løses nedefra for hver af de 3 ubekendte søjler for sig, svarende til de 3 søjler af højresider. På skemaform har vi

	$\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT}$					$\mathbf{P}_{TA}$		$\mathbf{1}^T$	$\mathbf{R}$		$\boldsymbol{\mu}^T$
S	1	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{269}{408}$	$\frac{139}{408}$	$\frac{70}{17}$
2	0	$\frac{17}{18}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{201}{340}$	$\frac{139}{340}$	$\frac{318}{85}$
3	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{43}{80}$	$\frac{37}{80}$	$\frac{69}{20}$
4	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	1	$\frac{11}{24}$	$\frac{13}{24}$	3
5	0	0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	1	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{9}{4}$

Sandsynligheden for, at A vinder, er $269/408 = 65.9\%$, og sandsynligheden for, at B vinder, er $139/408 = 34.1\%$. Den forventede varighed er $70/17 = 4.1$ kast. Man ser også, hvordan sandsynlighederne ændrer sig under forløbet af spillet, før der kommer en afgørelse. □

Eksempel 7.3. (Tennis) I et *parti* i tennis er der følgende 20 muligheder for stillingen mellem de to spillere A og B: 0–0, 15–0, 0–15, 30–0, 15–15, 0–30, 40–0, 30–15, 15–30, 0–40, 40–15, 30–30, 15–40, 40–30, 30–40, Lige, Fordel A, Fordel B samt Parti til A og Parti til B. Reelt drejer det sig om at først at vinde 4 bolde, dog med 2 bolde mere end modparten. Lad os antage, at A har sandsynligheden p for at vinde en bold og B sandsynligheden $q = 1 - p$. Man ser let, at sandsynligheden for at vinde partiet er den samme ved stillingerne 40–30 og Fordel A, ved 30–30 og Lige samt ved 30–40 og Fordel B, hvorfor disse stillinger kan slås sammen. Derved

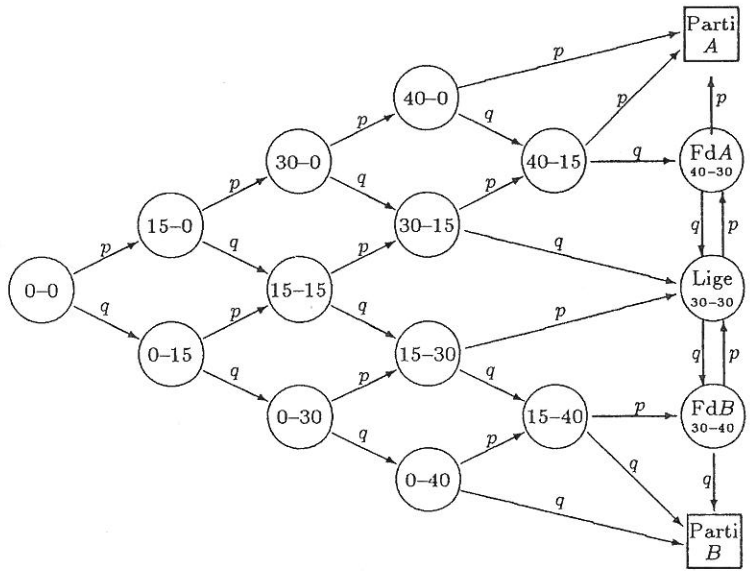
fås en Markov-kæde, hvis overgangsdiagram er angivet på næste side.

Man ser, at der yderst til højre er tale om et random walk med to absorberende barrierer. Det kan behandles efter efter metoderne i afsnit 5 (se opgave 7.8). Vi vil dog direkte bestemme absorptionssandsynlighederne. Vi har delovergangsmatricerne

$$\mathbf{P}_{TT} = \begin{array}{c} \\ \text{Fd}A \\ \text{Lige} \\ \text{Fd}B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Fd}A & \text{Lige} & \text{Fd}B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}_{TA} = \begin{array}{c} \\ \text{Fd}A \\ \text{Lige} \\ \text{Fd}B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Pt}A & \text{Pt}B \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \end{array},$$

og skal løse (7.2). Denne gang vil vi bestemme $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT})^{-1}$. Vi har

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT}) = \begin{vmatrix} 1 & -q & 0 \\ -p & 1 & -q \\ 0 & -p & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2pq = p^2 + q^2.$$



(Her og idet følgende benyttes, at $p + q = 1$.) Vi får videre

$$(I - \mathbf{P}_{TT})^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} 1 - pq & q & q^2 \\ p & 1 & q \\ p^2 & p & 1 - pq \end{pmatrix},$$

som giver

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{TT})^{-1}\mathbf{P}_{TA} = \frac{1}{p^2+q^2} \cdot \begin{array}{c} \\ \text{FdA} \\ \text{Lige} \\ \text{FdB} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{PtA} & \text{PtB} \end{array} \\ \begin{pmatrix} p - p^2q & q^3 \\ p^2 & q^2 \\ p^3 & q - pq^2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

De øvrige tilstande har den egenskab, at de forlades, straks efter de nås, hvorfor vi blot behøver at addere sandsynlighederne for de ruter, der fører til det afsluttende random walk. Vektoren π af sandsynligheder for at »ramme« de 5 tilstande i det afsluttende random walk ved start i 0–0 er

$$\begin{aligned} \pi &= (\pi_{\text{PtA}}, \pi_{\text{FdA}}, \pi_{\text{Lige}}, \pi_{\text{FdB}}, \pi_{\text{PtB}}) \\ &= (p^4 + 4p^4q,\ 4p^3q^2,\ 6p^2q^2,\ 4p^2q^3,\ 4pq^4 + q^4). \end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at A vinder partiet, er da

$$\begin{aligned} r_{0\text{–}0,\text{PtA}} &= \pi_{\text{PtA}} + \pi_{\text{FdA}} r_{\text{FdA,PtA}} + \pi_{\text{Lige}} r_{\text{Lige,PtA}} + \pi_{\text{FdB,PtA}} \\ &= p^4(1+4q) + \frac{1}{p^2+q^2}[4p^3q^2 \cdot (p - p^2q) + 6p^2q^2 \cdot p^2 + 4p^2q^3 \cdot p^3] \\ &= \frac{p^4}{p^2+q^2}(p^2 + 11q^2 + 4p^2q + 4q^3) \\ &= \frac{p^4(1+2q)[1+(2q)^2]}{p^2+q^2}. \end{aligned}$$

For $p \neq q$ kan dette ved forlængelse med $p^2 - q^2$ omformes til

$$r_{0\text{–}0,\text{PtA}} = \frac{p^4(1-16q^4)}{p^4-q^4},$$

der nok er det simpleste udtryk til numerisk beregning. Her er en tabel:

p	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$r_{0\text{–}0,\text{PtA}}$	0.5	0.736	0.901	0.978	0.999

Vi ser, at en lille fordel for den enkelte bold forstørres op. Dette bliver mere markant for et sæt for ikke at tale om hele kampen. Der er materiale til et halvt års projektarbejde, hvis alle gevinstsandsynligheder og forventede antal bolde skal beregnes for partier, tie-breakers, sæt og kampe (med hensyntagen til servefordel), og disse tal skal sammenlignes med statistiske opgørelser fra aktuelle kampe! □

Som navnlig det sidste eksempel viser, kan beregningerne af absorptionssandsynlighederne være ganske komplicerede. Det samme gælder naturligvis middelventetiden til absorption. Opgave 7.7 er et eksempel på et random walk i planen. Det kan naturligvis udvides til langt større netværk. Man kan let komme op på størrelser af Markov-kæder, hvor selv beregning ved edb giver problemer. I så fald bruger man ofte simulering, idet man et stort antal gange gennemløber Markov-kæden indtil absorption og udnytter det statistiske talmateriale.

OPGAVER

7.1 ∗ Find i eksempel 3.3 (side 21) middelventetiden indtil rotten når rum nr. 4.

7.2 ∗ Antag, at to nabohjørner er absorberende ved et random walk på hjørnerne af en terning. Find absorptionssandsynligheder og middelventetid indtil absorption.

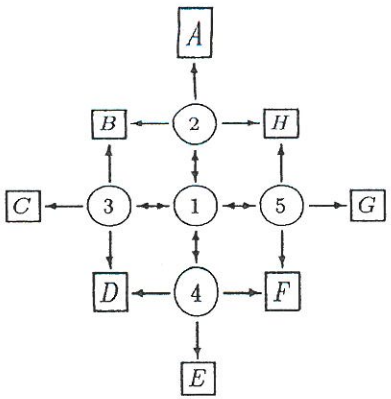
7.3 ∗ I eksempel 7.2 var omtalt en situation, der kunne give uafgjort, men blev afgjort til fordel for B. Beregn sandsynlighederne, hvis uafgjort regnes for en tredje absorberende tilstand.

7.4 I eksempel 7.2 kastede en neutral person terningerne. Hvilke ændringer forekommer, hvis A og B skiftes til at kaste med B først (og kastene kun tæller for dem selv)?

7.5 Opstil overgangsdiagrammet for crap (se opgave 1.9). Er der tilstande, der kan slås sammen? Find med metoderne i dette afsnit påny sandsynlighederne for, at spilleren vinder.

7.6 ∗ 3 tanks A, B og C skyder med faste tidsintervaller samtidigt på hinanden, så længe de ikke selv er ramt. A, B og C har træfsikkerheder på henholdsvis $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$. Enhver operativ tank skyder på den mest træfsikre af de to andre, hvis disse begge er operative. Angiv Markov-kædens tilstande og overgangsmatrix. Angiv absorptionssandsynlighederne og kampens forventede varighed.

7.7 ∗ Et random walk foregår i et gitter i planen på den måde, at en partikel med sandsynlighed $\frac{1}{4}$ bevæger sig i de 4 mulige retninger. På diagrammet er tilstandene med numre transiente og tilstandene med bogstaver absorberende. Beregn alle absorptionssandsynligheder og middelventetider.



(Vink: Når man skal beregne $(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{TT})^{-1}$, kan man benytte symmetrien, så der i stedet for 25 værdier kun skal beregnes 4.)

7.8 Beregn efter formlerne i afsnit 6 absorptionssandsynlighederne i det random walk, der indgår i eksempel 7.3. Vis, at resultatet stemmer overens med det i eksemplet anførte.

7.9 Opstil diagrammet i eksempel 7.3, når man ikke slår tilstande sammen. Udfør beregningerne. (Både fordele og ulemper.)

7.10 Vis, at middelantal bolde bolde i et parti tennis fra det tidspunkt, hvor det afsluttende random walk nås, og indtil partiet er slut, er givet ved

$$\mu_{\mathrm{Fd}A} = \frac{1+2q^2}{p^2+q^2}, \qquad \mu_{\mathrm{Lige}} = \frac{2}{p^2+q^2}, \qquad \mu_{\mathrm{Fd}B} = \frac{1+2p^2}{p^2+q^2}.$$

Betyder det noget, at vi fx slog 30–30 sammen med Lige?

7.11 Vis, at hvis spillerne er jævnbyrdige i et parti tennis, er det forventede antal bolde $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$. (Vink: Der skal tages højde for, at ruterne frem til vort random walk ikke er lige lange.)

8 Stationær fordeling

Vi har i afsnit 3 udledt formlen $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n\mathbf{P}$, der ud fra sandsynlighedsfordelingen til tidspunktet n giver fordelingen til næste tidspunkt $n+1$. Hvis specielt $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n$, vil fordelingen være den samme i al fremtid, og man taler om en stationær fordeling. En fordeling $\boldsymbol{\pi}$ siges altså at være *stationær*, såfremt $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$.

Eksempel 8.1. Lad en Markov-kæde med to tilstande have overgangsmatricen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

For en stationær fordeling $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1,\ \pi_2)$ må gælde

$$\pi_1 = \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_2,$$
$$\pi_2 = \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{3}{4}\pi_2.$$

Disse ligninger er ækvivalente, idet de begge kan omformes til

$$\pi_2 = 2\pi_1.$$

Da $\boldsymbol{\pi}$ skal være en sandsynlighedsfordeling, må $\pi_1 + \pi_2 = 1$; altså er

$$\pi_1 = \tfrac{1}{3}, \qquad \pi_2 = \tfrac{2}{3}$$

stationær fordeling (og den eneste mulige). □

Eksempel 8.2. Lad Markov-kæden have overgangsmatricen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dette er et ekstremt tilfælde, idet begge tilstande er absorberende. Fordelingen fra eksempel 8.1 ses ved indsættelse også at være stationær her. Denne fordeling har dog ingen speciel rolle her: Alle fordelinger er stationære! □

De to eksempler illustrerer helt forskellige situationer, selv om de har en fælles stationær fordeling. Hvis man starter med fordelingen $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$, vil denne fordeling fortsætte i fremtiden, men på vidt forskellig måde. I det første eksempel vil uanset start begge tilstande nås uendelig mange gange; i det andet eksempel er der sket en randomisering i starten, og der sker ingen ændringer senere.

Lad os se på den generelle formel til beregning af stationær fordeling. Formlen $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ kan omformes til $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \mathbf{0}$, eller ved transponering $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^T\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{0}^T$, svarende til, at den ubekendte $\boldsymbol{\pi}$ står som en søjlevektor $\boldsymbol{\pi}^T$, hvilket er den normale matrixformulering af ligningssystemer. Dette homogene lineære ligningssystem har uendelig mange løsninger (se opgave 8.1); men da $\boldsymbol{\pi}$ skal være en sandsynlighedsfordeling, må $\sum_i \pi_i = 1$, i matrixnotation $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^T = 1$. Endvidere skal alle $\pi_i \geq 0$. Sammenfattende fås en stationær fordeling som løsning til

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})^T\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^T = 1, \quad \pi_i \geq 0. \tag{8.1}$$

Som det vil fremgå af det følgende, eksisterer der altid mindst én stationær løsning.

Man kan også benytte:

• **Strømningsargumentet.** *Ved en stationær fordeling skal der i løbet af en tidsenhed for hver tilstand strømme lige så megen sandsynlighedsmasse ind, som der strømmer ud.*

For tilstand i er indstrømningen $\sum_{k\neq i} \pi_k p_{ki}$ og udstrømningen $\pi_i(1-p_{ii})$, altså

$$\sum_{k\neq i} \pi_k p_{ki} = \pi_i(1-p_{ii}).$$

Dette er naturligvis blot en omformning af formlen $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$.

Eksempel 8.3. I eksempel 3.4 er

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})^T = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.15 & -0.20 \\ -0.10 & 0.20 & -0.15 \\ -0.05 & -0.05 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

Ligningssystemet er da

$$\begin{array}{rcrcrcl} \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & = & 1, \\ 0.15\,\pi_1 & - & 0.15\,\pi_2 & - & 0.20\,\pi_3 & = & 0, \\ -0.10\,\pi_1 & + & 0.20\,\pi_2 & - & 0.15\,\pi_3 & = & 0, \\ -0.05\,\pi_1 & - & 0.05\,\pi_2 & + & 0.35\,\pi_3 & = & 0. \end{array}$$

Vi skriver det på skemaform og benytter rækkeoperationer for at bringe det på *echelon-form*:[10]

π_1	π_2	π_3	
1	1	1	1
0.15	−0.15	−0.20	0
−0.10	0.20	−0.15	0
−0.05	−0.05	0.35	0
1	1	1	1
0	−0.30	−0.35	−0.15
0	0.30	−0.05	0.10
0	0	0.40	0.05
1	1	1	1
0	−0.30	−0.35	−0.15
0	0	−0.40	−0.05
0	0	0.40	0.05

[10] Se fx Rabenstein: Elementary Differential Equations with Linear Algebra.

Den sidste ligning er (som ventet) overflødig. Ved baglæns løsning får vi $\pi_3 = 0.1250$, $\pi_2 = 0.3542$, $\pi_1 = 0.5208$, altså

$$\boldsymbol{\pi} = (0.5208,\ 0.3542,\ 0.1250).$$

Den stationære fordeling kan naturligvis også angives på eksakt form

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{25}{48}, \frac{17}{48}, \frac{1}{8}\right).$$

Lad os dernæst se på strømningsargumentet. Det kan være en fordel at se på overgangsdiagrammet (se side 26). Til kaffemærke A (tilstand 1) kommer der $0.15\,\pi_2$ nye forbrugere fra mærke B (dvs. 15% af forbrugerne af mærke B ugen før) og $0.20\,\pi_3$ fra mærke C, medens i alt $0.15\,\pi_1$ forlader mærke A, altså

$$0.15\,\pi_2 + 0.20\,\pi_3 = 0.15\,\pi_1.$$

Tilsvarende fås for mærkerne B og C

$$0.10\,\pi_1 + 0.15\,\pi_3 = 0.20\,\pi_2,$$
$$0.05\,\pi_1 + 0.05\,\pi_2 = 0.35\,\pi_3.$$

Disse ligninger er ækvivalente med de tidligere angivne. □

Vi vil nu bevise følgende hovedsætning om stationære fordelinger:

• *En endelig regulær Markov-kæde har præcis én stationær fordeling. For enhver startfordeling (specielt deterministisk starttilstand) konvergerer fordelingen mod den stationære fordeling.*

Bevis: Lad os se på den j'te søjle i $\mathbf{P}^n$, altså tallene $p_{1j}^{(n)}, p_{2j}^{(n)}, \ldots, p_{sj}^{(n)}$, idet der antages at være s tilstande. Vi vil vise, at de alle konvergerer mod en fælles værdi π_j for $n \to \infty$. Lad $m_j^{(n)}$ betegne det mindste og $M_j^{(n)}$ det største af disse s tal. Hvis fx α er rækkeindeks for det mindste tal i søjlen, fås

$$m_j^{(n)} = p_{\alpha j}^{(n)} = \sum_k p_{\alpha k} p_{kj}^{(n-1)} \geq \sum_k p_{\alpha k} m_j^{(n-1)} = m_j^{(n-1)}. \tag{8.2}$$

Analogt bevises $M_j^{(n)} \leq M_j^{(n-1)}$. Vi har altså

$$m_j^{(0)} \leq m_j^{(1)} \leq \ldots \leq m_j^{(n-1)} \leq m_j^{(n)} \leq \ldots \leq M_j^{(n)} \leq M_j^{(n-1)} \leq \ldots \leq M_j^{(1)} \leq M_j^{(0)}.$$

Hvis $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0$ for $n \to \infty$, må intervallerne $[m_j^{(n)},\ M_j^{(n)}]$ udgøre en »ruse«, der indsnævrer sig om et tal π_j. For at vise dette skal vi benytte antagelsen om regularitet.

Først antager vi, at det allerede for selve $\mathbf{P}$ gælder, at alle elementerne er positive. Lad ε betegne det mindste element, altså

$$\varepsilon = \min_{i,j} p_{ij} > 0.$$

Idet vi antager, at det største element i den j'te søjle af $\mathbf{P}^n$ har rækkeindeks β, altså $M_j^{(n)} = p_{\beta j}^{(n)}$, kan vi forbedre vurderingen i (8.2) således:

$$\begin{aligned} m_j^{(n+1)} &= \sum_k p_{\alpha k} p_{kj}^{(n)} \\ &= p_{\alpha\beta} p_{\beta j}^{(n)} + \sum_{k \neq \beta} p_{\alpha k} p_{kj}^{(n)} \\ &\geq p_{\alpha\beta} M_j^{(n)} + \sum_{k \neq \beta} p_{\alpha k} m_j^{(n)} \\ &= p_{\alpha\beta}(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) + \sum_k p_{\alpha k} m_j^{(n)} \\ &\geq \varepsilon\,(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) + m_j^{(n)} \end{aligned}$$

Ved et lignende argument (opgave 8.2) får vi

$$M_j^{(n+1)} \leq -\varepsilon\,(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) + M_j^{(n)}. \tag{8.3}$$

Ved subtraktion af disse uligheder fås

$$M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}).$$

For hvert trin indsnævres intervallet altså mindst med en faktor $1 - 2\varepsilon$. Ved induktion får man

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq (1 - 2\varepsilon)^n\,(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}),$$

som viser, at $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0$ for $n \to \infty$.

Intervalrusen $[m_j^{(n)},\ M_j^{(n)}]$, $n = 0, 1, \ldots$ indsnævrer sig altså om et tal π_j, hvilket viser, at

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j \quad \text{for } n \to \infty$$

gælder for alle starttilstande i. Vi indfører grænsefordelingen

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_s)$$

og grænseværdimatricen med ens rækker

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_s \end{pmatrix}.$$

Vi har vist, at

$$\mathbf{P}^n \to \boldsymbol{\Pi} \quad \text{for } n \to \infty.$$

At fordelingen $\boldsymbol{\pi}$ er stationær, ses af udtrykket

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \mathbf{P},$$

som ved grænseovergangen $n \to \infty$ giver

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{P},$$

hvilket for en vilkårlig række udtrykker, at

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}.$$

For en vilkårlig startfordeling $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_1^{(0)}, \ldots, \pi_s^{(0)})$ fås

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{P}^n \to \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\pi} \quad \text{for } n \to \infty,$$

hvorfor startfordelingen konvergerer mod den stationære. Dette viser også, at den stationære fordeling $\boldsymbol{\pi}$ er entydigt bestemt, da der ikke kan være to grænseværdier.

Vi mangler at se på situationen, hvor $\mathbf{P}$ selv indeholder nuller, men en potens $\mathbf{P}^N$ har lutter positive elementer. Ved kun at se på hvert N'te trin følger af det foregående, at der eksisterer en matrix $\boldsymbol{\Pi}$, så

$$\mathbf{P}^{qN} \to \boldsymbol{\Pi} \quad \text{for } q \to \infty.$$

For et vilkårligt tidspunkt n kan vi skrive

$$n = qN + r, \quad 0 \leq r \leq N - 1.$$

Vi har da

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^r \mathbf{P}^{qN} \to \mathbf{P}^r \boldsymbol{\Pi} \quad \text{for } q \to \infty,$$

og da alle rækker i $\boldsymbol{\Pi}$ er ens, må $\mathbf{P}^r \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}$, altså er vist

$$\mathbf{P}^n \to \boldsymbol{\Pi} \quad \text{for } n \to \infty.$$

Resten af beviset er uforandret. ■

Eksempel 8.3. (Fortsat) I kaffeeksemplet er konvergensen $\mathbf{P}^n \to \Pi$ illustreret på side 24. Ud fra $\mathbf{P}^n$ kan π_n let beregnes. Selv om der startedes med en markedsfordeling, der var langt fra den stationære, var man allerede efter 8 uger ganske tæt ved den stationære fordeling. □

Tilstandene i en regulær Markov-kæde er persistente, og vi har tidligere bevist, at middeltilbagevendingstiden μ_{ii} er endelig. Vi skal nu vise, at der gælder:

- *For en endelig regulær Markov-kæde er for hver tilstand i middeltilbagevendingstiden μ_{ii} givet ved*

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i},$$

hvor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ er den stationære fordeling.[11]

Bevis: Vi indfører middelovergangstiderne μ_{ij}, der forsvinder igen på en pudsig måde. Ved et argument, der er helt parallelt til det, der førte frem til formlen (7.3), får vi

$$\mu_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj} + 1. \tag{8.4}$$

Vi benytter den stationære fordeling $\boldsymbol{\pi}$ og får af (8.4)

$$\begin{aligned}
\sum_i \pi_i \mu_{ij} &= \sum_i \pi_i \Big(\sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj} + 1\Big) \\
&= \sum_{k \neq j} \Big(\sum_i \pi_i p_{ik}\Big)\mu_{kj} + 1 \\
&= \sum_{k \neq j} \pi_k \mu_{kj} + 1 \\
&= \sum_k \pi_k \mu_{kj} - \pi_j \mu_{jj} + 1.
\end{aligned}$$

Ved sammenligning af første og sidste udtryk fås

$$\pi_j \mu_{jj} = 1,$$

som umiddelbart giver resultatet. ■

For μ_{ij}, $i \neq j$ er udtrykket ikke så simpelt, men det kan dog beregnes ved løsning af (8.4).

[11] Heraf følger, at $\pi_i > 0$ i den stationære fordeling. Dette kunne også ses direkte ved en nøjere granskning af beviset for konvergens mod stationær fordeling.

Eksempel 8.1. (Fortsat) I dette tilfælde bliver (8.4) til

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \tfrac{1}{2}\mu_{21} + 1, \\
\mu_{12} &= \tfrac{1}{2}\mu_{12} + 1, \\
\mu_{21} &= \tfrac{3}{4}\mu_{21} + 1, \\
\mu_{22} &= \tfrac{1}{4}\mu_{12} + 1,
\end{aligned}$$

med løsningen

$$\mu_{11} = 3, \quad \mu_{12} = 2, \quad \mu_{21} = 4, \quad \mu_{22} = \tfrac{3}{2},$$

hvor μ_{11} og μ_{22} er i overensstemmelse med $\pi_1 = \frac{1}{3}$, $\pi_2 = \frac{2}{3}$. □

Hvis Markov-kæden stadig er irreducibel, men periodisk med perioden d, ved vi fra afsnit 5, at der er d cykliske underklasser $K_0, K_1, \ldots, K_{d-1}$. Ved start i en tilstand i fx K_0 vil der ikke være konvergens mod en stationær fordeling, da man til tiden n, hvor $n = qd+r$, med sikkerhed er i K_r. Hvis man kun observerer Markov-kæden hvert d'te tidspunkt, vil der være tale om d adskilte lukkede aperiodiske klasser, der hver især har en stationær fordeling. For den oprindelige Markov-kæde er der også en stationær fordeling, hvor hver af de cykliske klasser får en sandsynlighedsvægt på $1/d$. Der er altså i starten sket en randomisering mellem de cykliske underklasser, hvorimod udligningen inden for hver cyklisk underklasser kan ske efterhånden.

OPGAVER

8.1 ∗ Find en simpel egentlig løsning til matrixligningen $(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ (bemærk, at $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ ikke er transponeret). Vis, at $\det(\mathbf{I}-\mathbf{P})^T = 0$. (Se side 53.)

8.2 Vis formlen (8.3).

8.3 ∗ En matrix $\mathbf{P} = (p_{ij})$ kaldes *dobbeltstokastisk*, såfremt alle elementer $p_{ij} \geq 0$ og både række- og søjlesummer alle er 1. Find den stationære fordeling i de tilfælde, hvor Markov-kæden er regulær. Er der et eksempel tidligere i denne fremstilling?

8.4 ∗ Find den stationære fordeling i opgave 3.5. Når én af pigerne har bolden, hvor længe skal hun så i middel vente på at få den igen?

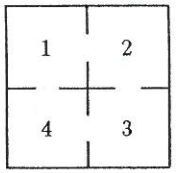
8.5 ∗ I Markov-kæden i opgave 5.6 antages de to overgange fra tilstand 2 at være lige sandsynlige. Bestem den stationære fordeling og middeltilbagevendingstiderne. Bestem for hver tilstand i direkte fordelingen

$$f_{ii}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

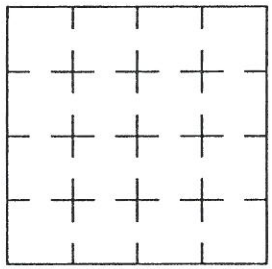
for den første tilbagekomst og kontrollér herved formlen for μ_{ii}.

8.6 (Fortsættelse) Lav for foregående opgave en tabel, der illustrerer konvergensen af $\mathbf{P}^n$, analogt til eksempel 3.4 (side 24). Går det lige så hurtigt?

8.7 * En rotte bevæger sig i nedenstående labyrint, så den for hver tidsenhed vælger en tilfældig af de mulige døre. Find den stationære fordeling. Antag, at rotten til tid 0 er i rum 1. Hvad kan man sige om rottens position efter lang tid? Find middeltilbagevendingstiden.



8.8 * Samme spørgsmål for følgende labyrint. (Vink: Brug symmetriargumenter.)



9 Uendelige Markov-kæder

Vi skal kort se på, hvad man kan sige om en Markov-kæde, der har uendelig mange tilstande. Lad tilstandene være 0, 1, 2, ... Sandsynlighedsfordelingen til tiden n kan beskrives ved en uendelig vektor:

$$\pi_n = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \ldots, \pi_i^{(n)}, \ldots)$$

og overgangssandsynlighederne ved en uendelig overgangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

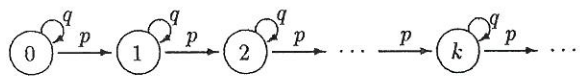
Fordelingens ændring fra trin til trin fås stadig ved

$$\pi_{n+1} = \pi_n \mathbf{P},$$

idet der her ved matrixmultiplikationen er tale om uendelige summer.

De fleste af de beviser, der er givet i det foregående, benytter på væsentlig måde, at der kun er endelig mange tilstande. Resultaterne gælder heller ikke altid. Klasseinddelingen i åbne og lukkede klasser gælder dog stadig. Ligeledes, at alle tilstande i en klasse har samme periode. Vi vil ikke give en systematisk gennemgang at teorien for uendelige Markov-kæder, men blot illustrere med nogle eksempler.

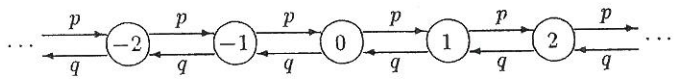
Eksempel 9.1. Lad overgangsdiagrammet være



hvor $p + q = 1$. Hver tilstand udgør en åben klasse for sig, og der er altså ingen lukkede klasser. Der er naturligvis ingen stationær fordeling. Markov-kæden beskriver Bernoulli-forsøg (se side 1), hvor p er sandsynligheden for gunstigt resultat, og tilstandenes numre svarer til det antal gunstige, der hidtil er opnået. Med start i tilstand 0 er fordelingen efter n tidsenheder binomialfordelingen $b(n, p)$. Ventetiden for overgangen $0 \to 1$ er geometrisk fordelt. Ventetiden for overgangen $0 \to k$ er negativt binomialfordelt (se opgave 9.1). □

For en uendelig Markov-kæde gælder stadig, at tilstandene i en åben klasse alle er transiente. Derimod er der for lukkede klasser 3 muligheder, idet tilstandene enten er (1) alle transiente, (2) alle nulpersistente eller (3) alle positiv-persistente, dvs. persistente med endelig middeltilbagevendingstid.

Eksempel 9.2. (Ubegrænset random walk) Der er tilstande svarende til alle hele tal. Overgangsdiagrammet er (med $p + q = 1$):



Markov-kæden er åbenbart irreducibel med periode 2. Vi vil bestemme tilbagevendingssandsynligheden f_{00} for tilstand 0 (og dermed for alle tilstande). Antag først, at der er absorberende barrierer i tilstandene $-N$ og N, og lad tilbagevendingssandsynligheden i den modificerede Markov-kæde være $f_{00,N}$. Det kan matematisk bevises, at $\lim_{N\to\infty} f_{00,N} = f_{00}$. Vi vil benytte dette umiddelbert plausible resultat og beregner derfor først $f_{00,N}$. Ved det første trin går vi med sandsynlighed p til tilstand 1, og der er derefter tale om et klassisk ruinproblem, hvor der skal ske absorption i 0 før i n. Lad sandsynligheden være $r_{1,N}$ med k=1 i formel (6.3). Med sandsynlighed q går vi i første trin til tilstand -1, og med en passende nulpunktsforskydning kan vi antage, at vi er i tilstand $N-1$ i et klassisk ruinproblem, og at der skal ske absorption i N før i 0. Altså er for $p \neq q$

$$\begin{aligned} f_{00,N} &= p\, r_{1,N} + q\,(1 - r_{N-1,N}) \\ &= p \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + q \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ &= 2q \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ &= 2p \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}, \end{aligned}$$

hvor det sidste udtryk er fremkommet ved at forlænge med $(p/q)^N$. For $p < \frac{1}{2}$ benyttes det sidste udtryk, og for $p > \frac{1}{2}$ benyttes det næstsidste udtryk. Vi får

$$f_{00,N} \to \begin{cases} 2p & \text{for } p < \frac{1}{2}, \\ 2q & \text{for } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Endelig fås for $p = q = \frac{1}{2}$ efter (6.4)

$$\begin{aligned} f_{00,N} &= \tfrac{1}{2} r_{1,N} + \tfrac{1}{2}(1 - r_{N-1,N}) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \frac{1}{N}) + \tfrac{1}{2}\frac{N-1}{N} \\ &= 1 - \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

så $f_{00,N} \to 1$ for $N \to \infty$. De 3 udtryk kan sammenfattes til

$$f_{00,N} \to 1 - |\, p - q \,| \quad \text{for } n \to \infty.$$

Vi får altså

$$f_{00} = 1 - |\, p - q \,|. \tag{9.1}$$

Dermed er vist, at tilstandene er transiente for $p \neq \frac{1}{2}$, men persistente for $p = \frac{1}{2}$. Lad os endvidere finde middeltilbagevendingstiden for $p = \frac{1}{2}$ vha. formel (6.9). Vi får

$$\begin{aligned} \mu_{00,N} &= p\,\mu_{1,N} + q\,\mu_{N-1,N} + 1 \\ &= \tfrac{1}{2}(N-1) + \tfrac{1}{2}(N-1) + 1 \\ &= N. \end{aligned}$$

Idet $\mu_{00,N} \to \infty$ for $n \to \infty$, kan man matematisk underbygge, at $\mu_{00} = \infty$. Tilstandene er altså for $p = \frac{1}{2}$ nulpersistente. Der er sikker tilbagevenden; men middeltilbagevendingstiden er uendelig stor.

I øvrigt kan man vise, at selve fordelingen for ventetiden til tilbagevenden er givet ved

$$f_{00}^{(2k)} = \frac{2\,(2k-2)!}{k!\,(k-1)!}\, p^k q^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9.2}$$

□

Lad Markov-kæden være irreducibel. Hvis tilstandene er transiente eller nulpersistente, kan der ikke eksistere nogen stationær fordeling. Er tilstandene derimod positiv-persistente (persistente med endelig middeltilbagevendingstid), eksisterer der en stationær fordeling. I det aperiodiske tilfælde vil enhver startfordeling konvergere mod den. Dette vises i mere avancerede kurser i Markov-kæder. En stationær fordeling er naturligvis stadig defineret ved

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P},$$

selv om der nu er tale om uendelige matricer. Man kan også vise, at for aperiodiske Markov-kæder er

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} \quad \text{for } n \to \infty.$$

I praksis benyttes ofte strømningsargumentet (side 54) til at undersøge, om der eksisterer en stationær fordeling, og i givet fald, hvordan den ser ud.

OPGAVER

9.1 Vis, at i eksempel 9.1 har ventetiden for overgangen $0 \to k$ den negative binomialfordeling, som er defineret ved

$$f_{ok}^{(n)} = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots$$

9.2 Reducér udtrykket (9.2) for $f_{00}^{(2)}$, $f_{00}^{(4)}$, $f_{00}^{(6)}$ og $f_{00}^{(8)}$. Vis ved et direkte argument, at resultaterne er korrekte.

9.3 $*$ En Markov-kæde med tilstande $0, 1, 2, \ldots$ har overgangssandsynlighederne

$$p_{i,0} = \frac{1}{i+2}, \quad p_{i,i+1} = \frac{i+1}{i+2}, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots$$

Find fordelingen for ventetiden til første tilbagevenden til 0. Find sandsynligheden f_{00} for tilbagekomst.[12] Find middeltilbagevendingstiden μ_{00} (se opgave 4.5). Klassificér tilstandene. Er der en stationær fordeling?

9.4 $*$ En Markov-kæde med tilstande $0, 1, 2, \ldots$ har følgende overgangssandsynligheder ved start i tilstand 0:

$$p_{00} = u_0, \quad p_{01} = u_1, \quad \ldots, \quad p_{0j} = u_j, \quad \ldots,$$

hvor $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = 1$, medens det i øvrigt gælder:

$$p_{i,i-1} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Giv et simpelt argument for, at Markov-kæden er persistent. Idet man lader μ være middelværdien i fordelingen $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$, altså

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n\, u_n,$$

skal man vise, at middeltilbagevendingstiden for tilstand 0 er

$$\mu_{00} = \mu + 1.$$

Angiv en stationær fordeling, såfremt en sådan eksisterer.

---

[12] Benyt $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

APPENDIKS B

Facitliste

3. 1: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, 1 i diagonalen, 0 under. 2: Ens rækker. 5: Se opg. 3.6; ja (P^5 nulfri). 9: Ja; 0, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{81}$, $\cancel{\frac{32}{729}}$ 41.

4. 2: $f_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $f_{11} = \frac{1}{2}$. 3: $f_{11}^{(n)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $\mu_{11} = 3$ (geom. ford.). 4: Korteste rute går gennem forskellige tilstande.

5. 1: 1 for k ulige, 2 for k lige. 4: fx $1 = 18 \cdot 30 - 12 \cdot 42 + 70 - 105$. 5: 3. 6: $n = 6$.

6. 3: r_k aftagende funktion af p (sæt $q/p = x$ i (6.3)). 5: 0, 0.009, 0.083; 5000, 454, 8.52; 0.982, 0.336, 0.119; ~~441 000~~ 44.085, 1179, 9.47. 6: Erstat p og q med p^* og q^* i formlerne. Ruinsandsynlighed uforandret, forventet forlænges varighed med faktor $1/(1-r)$. 7: $\mu_0 = 1 + 2/p^2$, $\mu_1 = 2/p^2$, $\mu_2 = 1 + 2q/p^2$; $\mu_k = N^2 - k^2$.

7. 1: 4, 3. 2: $\frac{9}{14}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{14}$; $\frac{9}{2}$, 6. 3: $\frac{269}{408}$, $\frac{128}{408}$, $\frac{11}{408}$. 6: ABC, AC, BC, A, B, C, 0; $\frac{81}{377}$, $\frac{39}{377}$, $\frac{217}{377}$, $\frac{40}{377}$; $\frac{644}{377}$. 7: $r_{1A} = \frac{1}{12}$, $r_{1B} = \frac{1}{6}$, $r_{2A} = \frac{13}{48}$, $r_{2B} = \frac{7}{24}$, $r_{2C} = \frac{1}{48}$, $r_{2D} = \frac{1}{24}$; $\mu_1 = \frac{8}{3}$, $\mu_2 = \frac{5}{3}$.

8. 1: $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)$. 3: Ligelig; opg. 4.3. 4: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$; 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$. 5: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$; $f_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}$, $f_{11}^{(5)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $f_{11}^{(8)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, ... 7: Ligelig; ulige tider ligeligt over 2 og 4, lige tider ligeligt over 1 og 3; 4. 8: $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{12}$; skaktern; 24, 16, 12.

9. 3: $\frac{1}{n(n+1)}$; 1; ∞; nulpersistent; nej. 4: Deterministisk tilbagevenden til 0; for $\mu < \infty$ er $\pi_n = (u_n + u_{n+1} + \cdots)/(\mu + 1)$.

REGISTER