Poissonprocessen

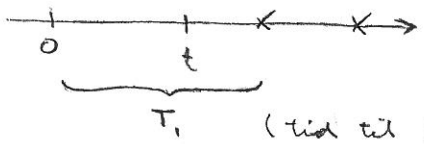
(tid mel. begivenheder)

Begivenheder, der indtræffer tilfældigt i tid (eller ...)

Antag $T_k \sim e(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$ uafh.

X: antal begivenheder i intervallet $[0;t]$

Bemærk, at $P(X=0) = P(T_1 > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})$
$= e^{-\lambda t}$



(tid til første begivenhed)

Betragt $S_k = \sum_{j=1}^{k} T_j$

$S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$, da T_j'erne er uafh.
og $T_j \sim e(\lambda)$, $j = 1, \ldots, k$
(vist i forl. m. foldning)

$$[X = k] = [S_k \le t \cap S_{k+1} > t]$$
$$= [S_k \le t \setminus S_{k+1} \le t]$$
$$P(X = k) = P(S_k \le t) - P(S_{k+1} \le t)$$
$$= F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t)$$
$$= \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\right)$$

$\longrightarrow$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

dvs. $X \sim p(\lambda t)$, λ kaldes intensiteten

I disjunkte intervaller af længde t_j gælder

$X_j \sim p(\lambda t_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ uafh.

Variabeltransf. $S_1 = T_1$, $S_2 = T_1 + T_2$ (T_1, T_2 uafh.)

$$\left.\begin{matrix} s_1 = t_1 \\ s_2 = t_1 + t_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 - s_1 \end{matrix}\right. \quad J(s_1, s_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{(S_1,S_2)}(s_1, s_2) = f_{(T_1,T_2)}(s_1, s_2 - s_1)\,|1|$$

$$= \lambda e^{-\lambda s_1}\lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda s_2}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \infty$$

$$f_{S_2}(s_2) = \int_0^{s_2} \lambda^2 e^{-\lambda s_2}\, ds_1 = \lambda^2 s_2 e^{-\lambda s_2}, \quad 0 < s_2 < \infty$$

$$f_{S_1|s_2}(s_1) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda s_2}}{\lambda^2 s_2 e^{-\lambda s_2}} = \frac{1}{s_2} \text{ (konst.)}, \quad 0 < s_1 < s_2$$

dvs. $S_1 | s_2 \sim U[0; s_2]$

Generaliseres til 'order statistic property':

Givet, at der indtræffer n begivenheder i $[0; t]$, så vil S_k'erne være simultant fordelt svarende til n observationer i en ligefordeling på $[0; t]$ arrangeret som ordensvariable, dvs.

$$f_{(S_1, S_2, \ldots S_n)}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < t$$

Udtynding

Begivenheder i en Poissonproces med intensitet λ observeres en. sandsh. p

X_p : antal obs. begivenheder

$X_p = \sum_{k=1}^{X} I_k$, $P(I_k = 1) = p$, I_k er indikatorvar. for obs. af k'te begivenhed

$G_{X_p}(s) = (G_X \circ G_I)(s)$, $G_X(s) = e^{\lambda t(s-1)}$

$G_I(s) = 1 - p + ps$

$$G_{X_p}(s) = \exp(\lambda t(1 - p + ps - 1))$$

$$= \exp(\lambda p t (s-1))$$

dvs. $X_p \sim \mathcal{P}(\lambda p t)$

Sætn. : X_p og X_{1-p} er uafh. $(X = X_p + X_{1-p})$

Bevis : $P(X_p = j, X_{1-p} = k)$

$$= P(X_p = j, X = k+j)$$

$$= P(X_p = j \mid X = k+j)\, P(X = k+j)$$

$$= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^{k+j-j} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k+j}}{(k+j)!}$$

$$= \frac{(k+j)!}{k!\,j!} p^j (1-p)^k \frac{e^{-\lambda p t} e^{-\lambda(1-p)t} (\lambda t)^k (\lambda t)^j}{(k+j)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^j}{j!} \frac{e^{-\lambda(1-p)t}(\lambda(1-p)t)^k}{k!}$$

$$= P(X_p = j)\, P(X_{1-p} = k)$$

Superposition

$X \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t)$

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2 t)$

$X + Y \sim \mathcal{P}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$

Bevis Tid mel. begivenheder

- i proces 1: $T_1 \sim e(\lambda_1)$
- i proces 2: $T_2 \sim e(\lambda_2)$

} uafh.

- i den superponerede proces:

$$\min\{T_1, T_2\}$$

Fra tidl. eks.: $\min\{T_1, T_2\} \sim e(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\Rightarrow \quad X + Y \sim \gamma((\lambda_1 + \lambda_2)t)$$