Intervalestimation

Ønske: At kunne supplere bestemmelsen af punktestimatet $\hat{\theta}$ med et interval (område), der er et mål for nøjagtigheden af denne bestemmelse.

Pivotstørrelse

Betragt $T : \mathcal{Y} \times \Theta \to \mathbb{R}^m$, $T(y, \theta) = \ldots$

Hvis fordelingen af $T(Y, \theta)$ ikke afhænger af θ, når θ er den sande parameterværdi, så kaldes $T(y, \theta)$ en pivotstørrelse. (Bemærk, at $T(y, \theta)$ ikke er en stikprøvefunktion!)

Lad $T(y, \theta)$ være en pivotstørrelse,

dvs. $P(T(Y, \theta) \in B ; \theta)$ afhænger af B, men ikke af θ.

Vælg B, så $P(T(Y, \theta) \in B ; \theta) = 1 - \alpha$

Hændelsen $\{y \mid T(y, \theta) \in B\}$ kan også noteres som $\{y \mid C(y) \ni \theta\}$, hvor $C(y) \subset \Theta$.

$P(C(Y) \ni \theta; \theta) = 1-\alpha$ skal tolkes som sandsynligheden for, at den stokastiske mængde $C(Y)$ omfatter den sande parameter, er $1-\alpha$.

$C(y)$ kaldes konfidensintervallet (konfidensmængden) for θ med konfidensgrad $1-\alpha$.

Bemærk, at $C(y)$ ikke er stokastisk.
$C(y) \ni \theta$ er et udsagn, som er sandt eller falskt.

Gentagne beregninger af et $C(y)$ på grundlag af nye observationer vil føre til, at $C(y) \ni \theta$ er et sandt udsagn i ca. $(1-\alpha)100\,\%$ af tilfældene.

Findes der altid en pivotstørrelse?

Lad Y være stok. var. med ford. fkt. $F(y;\theta)$

Så er $U = F \circ Y \sim U[0;1]$, idet

→

$$
\begin{aligned}
P(U \le t) &= P(F(Y) \le t) \\
&= P(Y \le F^{-1}(t)) \\
&= F \circ F^{-1}(t) \\
&= t
\end{aligned}
$$

Ofte benyttes andre pivotstørrelser.

eks. $y = (y_1, \dots, y_n)$, $Y_i \sim N(\theta, 1)$ uafh.

$\bar{Y} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$

$\frac{\bar{Y} - \theta}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$, dvs. $\sqrt{n}(\bar{Y} - \theta)$ er en pivotstørrelse

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\bar{Y} - \theta) < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(\bar{Y} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{Y} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

heraf ses, at

$$\bar{y} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{y} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

er et konfidensinterval for θ med konfidensgrad $1 - \alpha$.

Når konfidensintervallet er symmetrisk, anvendes ofte en lidt upræcis, men praktisk form:

$$\theta = \bar{y} \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\square$

Neymans kriterium

Valg blandt flere pivotstørrelser?

Valg, så

- $P(C(Y) \ni \theta_* ; \theta_*) = 1-\alpha$
- $P(C(Y) \ni \theta ; \theta_*)$ er minimum for alle $\theta \neq \theta_*$ og for alle $\theta_* \in \Theta$

Konstruktion af konfidensinterval

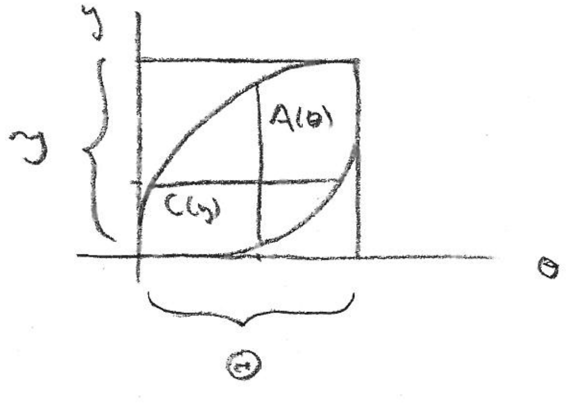
Betragt et test med signifikansniveau α. Acceptområdet benævnes $A(\theta)$

$$\left.\begin{array}{l} P(Y \in A(\theta) ; \theta) = 1-\alpha \\ P(C(Y) \ni \theta ; \theta) = 1-\alpha \end{array}\right\} \text{ viser}$$

ækvivalens mellem

$$\{y \mid y \in A(\theta)\} \text{ og } \{\theta \mid \theta \in C(y)\}$$

Skematisk tegning



Hvis det benyttede test har maksimal styrke, så er Neymans kriterium opfyldt.

eks. $(y_1, \dots, y_n)$, $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uafh.

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{Y}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

dvs.

$$\mu = \bar{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

er et konfidensinterval for μ med konfidensgrad $1-\alpha$.

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha,$$

dvs

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

er et konfidensinterval for σ^2 med konfidensgrad $1-\alpha$

□

Stat. 25.3.2010

eks. y er obs. i $p(\theta)$, $P(Y=y) = \dfrac{e^{-\theta}\theta^y}{y!}$,

$y = 0, 1, \ldots$

Test: $H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \neq \theta_0$

$$\lambda(y) = \frac{\dfrac{e^{-\theta_0}\theta_0^y}{y!}}{\dfrac{e^{-\hat\theta}\hat\theta^y}{y!}} = e^{y-\theta_0}\left(\frac{\theta_0}{y}\right)^y, \quad y > 0$$

idet $\hat\theta = y$

$$\ln \lambda(y) = y - \theta_0 + y(\ln\theta_0 - \ln y)$$

$$\frac{d \ln \lambda(y)}{dy} = 1 + \ln\theta_0 - \ln y + y\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$= \ln\theta_0 - \ln y = \ln\frac{\theta_0}{y} = 0$$

for $y = \theta_0$

$\lambda(y)$ voks. for $y < \theta_0$

$\lambda(y)$ aft. for $y > \theta_0$

acceptområdet har derfor formen

$$\{ y \mid y_1(\theta_0;\alpha) < y < y_2(\theta_0;\alpha) \}$$

$y < y_2(\theta_0;\alpha)$:

$$P(Y < y) = \sum_{k=0}^{y-1} \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$$

$$= P(V_y > \theta), \quad V_y \sim \Gamma(y, 1)$$

(egenskab ved gammafordelingen)

$$U_y = 2V_y \sim \chi^2(2y) \quad \text{, idet}$$

$$f(v) = \frac{1^y}{\Gamma(y)} v^{y-1} e^{-v}, \qquad v = \frac{1}{2}u$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}$$

$$f(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{2y}{2})} u^{\frac{2y}{2}-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2y}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \left|\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{2y}{2}} \Gamma(\frac{2y}{2})} u^{\frac{2y}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

$$P(V_y > \theta) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff P(V_y \leq \theta) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\iff P(U_y \leq 2\theta) = \frac{\alpha}{2} \iff \theta = \frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2y)$$

$y > y_1(\theta_0; \alpha)$:

$$P(Y > y) = 1 - P(Y \leq y)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{y} \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$$

$$= P(V_{y+1} \leq \theta), \quad V_{y+1} \sim \Gamma(y+1, 1)$$

$$U_{y+1} = 2V_{y+1}$$

analogt får vi $\quad U_{1+y} \sim \chi^2(2(y+1))$

$$P(V_{y+1} \leq \theta) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff P(U_{y+1} \leq 2\theta) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\iff \theta = \frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(y+1))$$

altså

$$\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2y) < \theta < \frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(y+1))$$

$\longrightarrow$

er et konfidensinterval for θ

med konfidensgrad $1-\alpha$.

Tilfældet $y=0$ behandles i opg. 4.16

Flere obs.:

$(y_1, \dots, y_n)$, $Y_i \sim p(\theta)$, $i = 1, \dots, n$ uafh.

sæt $y = \sum_i y_i$, $Y \sim p(n\theta)$,

beregn derfor først et konfidens-interval for $n\theta$ med metoden ovenfor. $\square$

Approksimative metoder

Kvotientteststørrelsens fordeling er ikke altid kendt, og selv om den er kendt, kan kompleksiteten være stor, jf. eksemplet ovenfor.

Approksimativt kan benyttes, at

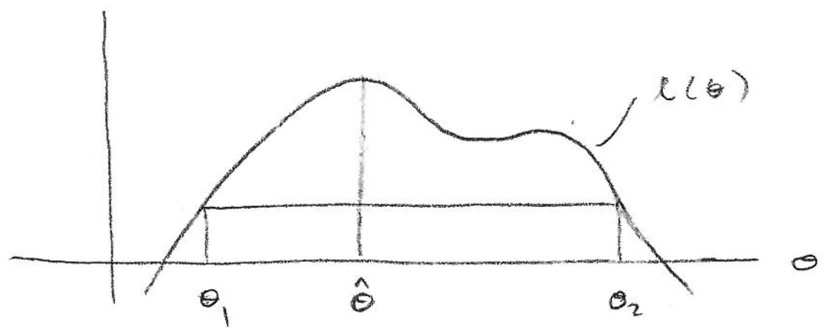
$$-2\ln \lambda(Y) \sim \chi^2(k) \text{ , hvor}$$

k er antal komponenter i parameteren θ.

De θ-værdier, som svarer til accept af H_0, er

$$\{\theta \mid 2(l(\hat{\theta}) - l(\theta)) < \chi^2_{1-\alpha}(k)\}$$

$k = 1$:



$$l(\theta_1) = l(\theta_2) = l(\hat\theta) - \frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(1)$$

entydig bestemmelse ?

$k \geq 2$: bestem alle θ, så

$$l(\theta) = l(\hat\theta) - \frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(k)$$

ofte ved computerberegning

$k = 2$: evt. optegning af niveaukurver

$k = 1$: Fra de asymptotiske resultater har vi

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < (\hat\theta - \theta)\sqrt{I(\theta)} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \to 1-\alpha$$

for $n \to \infty$.

for $n < \infty$ har vi det approksimative konfidensinterval

$$\theta = \hat\theta \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\hat I(\theta)}} \text{ , hvor}$$

$$\hat I(\theta) := I(\hat\theta) \quad \text{eller} \quad \hat I(\theta) := J(\hat\theta)$$

estimat for $I(\theta)$

bør foretrækkes

$\frac{1}{\sqrt{\hat{I}(\theta)}}$ kaldes standardafvigelsen

Asymptotiske resultater er baseret på approksimation af $l(\theta; y)$ med en parabel. Hvis grafen af l er udpræget skæv, bliver approksimationen dårlig. Reparametrisering kan ofte hjælpe.

eks. y obs. i $b(n, \theta)$, $P(Y=y) = \binom{n}{y} \theta^y (1-\theta)^{n-y}$

$$l(\theta) = y \ln\theta + (n-y)\ln(1-\theta)$$

$$l'(\theta) = \frac{y}{\theta} - \frac{n-y}{1-\theta}$$

$$l''(\theta) = -\frac{y}{\theta^2} - \frac{n-y}{(1-\theta)^2}$$

$$J(\hat{\theta}) = -l''(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad \hat{\theta} = \frac{y}{n}$$

$$= n^2\left(\frac{y}{y^2} + \frac{n-y}{(n-y)^2}\right) = n^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{n-y}\right)$$

$$= n^2 \frac{n-y+y}{y(n-y)} = \frac{n}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{J(\hat{\theta})}} = \sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}, \text{ dvs.}$$

$\theta = \hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}$ er approksimativt konfidensinterval for θ med konfidensgrad $1-\alpha$, $\longrightarrow$

men benyttelse giver ringe resultater.
(se talresultater i bog s. 149.)

For den asymptotiske fordeling af $\hat{\theta}$, jf. 3.19 s. 83, gælder

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \theta(1-\theta)), \text{ idet}$$

$$i(\theta) = \frac{1}{n} E[-l''(\theta)] = \frac{1}{n}\left(\frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n-n\theta}{(1-\theta)^2}\right) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Reparametrisering

Sæt $\omega = \operatorname{logit}\theta = \ln\frac{\theta}{1-\theta}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Korollar A.8.10 s. 309 (deltametoden) giver

$$\sqrt{n}\,(\hat{\omega}-\omega) \xrightarrow{d} U \sim N\left(0, \frac{\theta(1-\theta)}{(\theta(1-\theta))^2}\right) = N\left(0, \frac{1}{\theta(1-\theta)}\right)$$

Konfidensinterval for ω:

$$\omega = \ln\frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n\,\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}},$$

som kan transformeres tilbage til θ ved benyttelse af $\theta = \frac{e^{\omega}}{1+e^{\omega}}$.

(Talresultater, se bog s. 149.)

eks. n_1 og n_2 er obs. i $m(n, \pi_1, \pi_2)$

Sæt $\pi_0 = 1-\pi_1-\pi_2$, hvorefter

$$l(\pi_1, \pi_2) = \sum_{i=0}^{2} n_i \ln \pi_i$$

Maksimum likelihood estimatorne er

$$\hat{\pi}_i = \frac{n_i}{n}, \quad n = 0, 1, 2$$

Konfidensområder for (π_1, π_2) svarende til værdier af $\chi^2_{1-\alpha}(2)$ med $\alpha = 0{,}75$, $0{,}95$ og $0{,}99$ er optegnet på s. 151 i bog.

Bemærk, at

$$\frac{\partial l}{\partial \pi_1} = -\frac{n_0}{\pi_0} + \frac{n_1}{\pi_1} = -\frac{n_0}{1-\pi_1-\pi_2} + \frac{n_1}{\pi_1} = 0 \quad \text{for}$$

$$\frac{n_1}{\pi_1} = \frac{n_0}{1-\pi_1-\pi_2} \Leftrightarrow \frac{\pi_1}{n_1} = \frac{(1-\pi_2)-\pi_1}{n_0} \Leftrightarrow \frac{(n_0+n_1)\pi_1}{n_0 n_1} = \frac{1-\pi_2}{n_0}$$

$$\Leftrightarrow \pi_1 = \frac{n_1(1-\pi_2)}{n_0+n_1},$$ hvorefter

profilloglikelihooden for π_2 kan skrives

$$l^*(\pi_2) = l(\hat{\pi}_1(\pi_2), \pi_2), \quad \hat{\pi}_1(\pi_2) = \frac{n_1(1-\pi_2)}{n_0+n_1}$$

Ved indsættelse i l fås

$$\begin{aligned} l^*(\pi_2) &= n_0 \ln \pi_0 + n_1 \ln \hat{\pi}_1(\pi_2) + n_2 \ln \pi_2 \\ &= n_0 \ln \pi_0 + n_1 \ln \frac{n_1}{n_0+n_1} + n_1 \ln(1-\pi_2) + n_2 \ln \pi_2 \\ &= c_1 + n_2 \ln \pi_2 + n_0 \ln\left(1 - \frac{n_1(1-\pi_2)}{n_0+n_1} - \pi_2\right) + n_1 \ln(1-\pi_2) \\ &= c_1 + n_2 \ln \pi_2 + n_0 \ln \frac{n_0}{n_0+n_1} + (n_0+n_1)\ln(1-\pi_2) \\ &= c + n_2 \ln \pi_2 + (n-n_2)\ln(1-\pi_2), \end{aligned}$$

hvilket er identisk med loglikelihooden for en binomialfordeling med sandsynligheds-parameter π_2.