

Eksamen i Fourier- og Vektoranalyse

Mandag den 12. januar 2009 kl. 9-13

Benyttelse af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Brug af enhver form for elektronisk kommunikationsudstyr er ikke tilladt.

Opgave 1 (15%)

Lad $a_i > 0$ for $i = 1, \dots, n$. Vis ved benyttelse af Lagranges multiplikatormetode, at minimum af $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$ under bibetingelsen $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ fås for

$$x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Opgave 2 (20%)

Betragt gradienten til et produkt af to funktioner, der begge er to gange differentiable med kontinuerte partielle afledede.

- Omskriv $\nabla(fg)$ til en sum af to led.
- Vis, at $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2f$.
(Vink: Formlen $\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \varphi \operatorname{div} \vec{v} + \nabla\varphi \cdot \vec{v}$ kan benyttes.)

Opgave 3 (20%)

Lad vektorfeltet $\vec{F}$ være givet ved

$$\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3\vec{k},$$

og lad $\mathcal{V}$ være det område, der er indesluttet mellem

$$\mathcal{S}_1 : z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0 \quad \text{og} \quad \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 0.$$

- Bestem $\vec{F}$'s flux ud gennem $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$.
- Udregn $\int_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

VEND

Opgave 4 (10%)

Skriv ∇f i sfæriske koordinater, når f er givet ved

$$f(r, \theta, \varphi) = r \sin \varphi.$$

Opgave 5 (25%)

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = -x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- a. Udvid f til en lige funktion, der er periodisk med perioden 2π , og bestem derefter Fourierrækken for f .
- b. Vis ved benyttelse af resultatet i spørgsmål a, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Opgave 6 (10%)

Bestem den Fouriertransformerede $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}$, når f er givet ved $f(t) = \frac{1}{t}$.