Eksamen i Fourier- og Vektoranalyse

Fredag den 8. januar 2010 kl. 9-13

Benyttelse af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Enhver form for brug af elektronisk kommunikationsudstyr er ikke tilladt.

Opgave 1 (15%)

Betragt halvkuglen $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$. Vi ønsker at indskrive en kasse (et retvinklet parallelepipedum) i denne, således at én af kassens flader står på xy-planen.

Bestem det maksimale volumen, som kassen kan få.

(Vink: Benyt Lagranges multiplikatormetode.)

Opgave 2 (20%)

Lad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være et skalarfelt og $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et vektorfelt.

a. Vis, at der under passende forudsætninger om differentiabilitet gælder, at

$$\operatorname{curl}(\varphi\vec{v}) = \varphi \operatorname{curl} \vec{v} + \operatorname{grad} \varphi \times \vec{v}.$$

b. Benyt ovenstående formel til at udregne $\operatorname{curl}(\varphi\vec{v})$, når $\varphi(x,y,z) = xy$ og $\vec{v}(x,y,z) = y^2\,\vec{i} + xz\,\vec{k}$.

Opgave 3 (15%)

I planen er givet vektorfeltet $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, hvor

$$\vec{F}(x,y) = (x^3 + xy^2 - 2y)\,\vec{i} + (x^2y + 3x - 2y)\,\vec{j}.$$

a. Er $\vec{F}$ et konservativt vektorfelt? (Giv begrundelse.)

b. Benyt Greens sætning til at udregne $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ langs ellipsen $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c. Bestem en potentialfunktion til vektorfeltet $\vec{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, hvor

$$\vec{G}(x,y) = (x^3 + xy^2 + 3y)\,\vec{i} + (x^2y + 3x - 2y)\,\vec{j}.$$

VEND

Opgave 4 (15%)

Betragt et fladestykke $\mathscr{S}$ givet ved

$$z = 1 - x^2, \qquad -1 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 3.$$

Randkurven kaldes $\mathcal{C}$. Desuden er der givet et vektorfelt

$$\vec{v}(x, y, z) = -x^2 y \,\vec{i} + 3yz \,\vec{k}.$$

a. Skitser fladestykket og vælg en omløbsretning på randkurven.

b. Udregn $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{r}$.

(Vink: Benyt Stokes' sætning.)

Opgave 5 (25%)

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi < x \le 0, \\ \cos x & \text{for} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

a. Idet f udvides til en periodisk funktion med perioden 2π, skal Fourierrækken for f bestemmes.

(Det oplyses, at $\displaystyle\int \cos x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{\cos(1-n)x}{2(1-n)} - \frac{\cos(1+n)x}{2(1+n)}$.)

b. Benyt resultatet i spørgsmål a til at vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right)^2 = \frac{\pi^2}{64}.$$

Opgave 6 (10%)

Bestem den Fouriertransformerede af funktionen $\dfrac{1}{x^2}$.

(Vink: Opfat $\dfrac{1}{x^2}$ som $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, og benyt reglen for transformation af den afledede funktion.)