

Om traktricen

En mand (m/k) er ude at gå tur med sin hund, der holdes i en snor med længden a . Hunden er ivrig og løber forrest, så snoren er strakt helt ud. På et vist tidspunkt drejer manden skarpt til højre, hvilket ikke passer hunden. Den sætter sig ned og bliver passivt trukket afsted.

Banekurven, som hunden kommer til at følge, kaldes en traktrice (eller en hundekurve). Egentlig fremkommer kun den ene gren af traktricen. Den anden gren fremkommer som banekurve for en imaginær hund, der med samme udgangspunkt trækkes af sted i stik modsat retning.

1. Bestem en ligning for hundens banekurve. (Vink: Indlæg et koordinatsystem, så manden, efter at have drejet, spadserer ud ad x -aksens positive del. Skitsér i dette koordinatsystem hundens banekurve. Opstil en geometrisk betingelse til bestemmelse af banekurven, og søg en ligning på formen $x = g(y)$.)
2. Bestem buelængden for hundens banekurve. (Vink: Bestem først buedifferentialet. Bemærk, at når y benyttes som parameter, så er hundens bevægelse modsat kurvens gennemløbsretning.)
3. Angiv krumningen i et vilkårligt punkt på banekurven. (Vink: Udtryk først buelængden som funktion af tangentdrejningen. En sådan sammenhæng kaldes en naturlig ligning for kurven.)

Hele traktricen, altså banekurven såvel for vores hund som for den imaginære hund, drejes om x -aksen. Herved fremkommer et omdrejningslegeme, som kaldes en pseudosfære (sfære = kugle) med pseudoradius a .

4. Bestem pseudosfærens areal og volumen og sammenlign med areal og volumen af en kugle med radius a . (Vink: Bemærk, at $dA = 2\pi y ds$, og at $dV = \pi y^2 dx$.)

Kuglen har krumningsmålet $\frac{1}{a^2}$ i alle punkter, mens pseudosfæren overalt har krumningsmålet $-\frac{1}{a^2}$ bortset fra punkterne på den cirkel, der adskiller de to halvdele af pseudosfæren.

Når krumningen til en kurve varierer monotont, konstrueres en ny kurve som det geometriske sted for den oprindelige kurves krumningscentre. En kurve fremkommet på denne måde kaldes en evolut.

5. Bestem en parameterfremstilling for traktricens evolut med traktricens ordinat y som parameter. (Vink: Krumningscentret svarende til punktet (x, y) på traktricen fås som endepunktet for stedvektoren $x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$, hvor $\mathbf{n}$ er enhedsnormalvektor til traktricen i (x, y) .)

6. Bestem en ligning for traktricens evolut. (Vink: Eliminer y mellem x_1 og y_1 . Omdøb til slut x_1 og y_1 til x og y .)

Bemærk, at traktricens evolut bliver en kædelinie. Når kædelinien er evolut til traktricen, vil traktricen være afvikler (eller evolvent) til kædelinien. Hvis vi lader en uendelig lang snor følge den halve kædelinie og derefter begynder at afvikle snoren fra det nederste punkt, mens den til stadighed holdes strakt, vil snorens endepunkt beskrive traktricens ene gren.

Drejes kædelinien omkring x -aksen, fremkommer en flade, som kaldes en katenoide. Katenoiden er en såkaldt minimalflade, dvs. en flade med middeldkrumning 0 overalt på fladen. De eneste to omdrejningsflader, der har denne egenskab, er katenoiden og planen. Af andre typer flader, der er minimalflader, kan nævnes vindelflader (tænk på sneglegangen i Rundetårn).

Facit

1.

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 < y \leq a$$

2.

$$s = -a \ln \frac{y}{a}, \quad 0 < y \leq a$$

3.

$$\kappa = \frac{y}{a\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad 0 < y < a$$

4.

$$A = 4\pi a^2, \quad \text{lig med kuglens areal}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3, \quad \text{halvdelen af kuglens volumen}$$

5.

$$(x_1, y_1) = \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \frac{a^2}{y} \right)$$

6.

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

3.4.2014/BR