Den todimensionale normalfordeling

Definition

En todimensional stokastisk variabel (X,Y) siges at være todimensional normalfordelt med parametrene μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 og ρ, når den simultane tæthedsfunktion for (X,Y) kan skrives

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}\Big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_1,\sigma_2 \in \mathbb{R}_+, \quad |\rho| < 1.$$

Bemærk, at

$$\det\Sigma = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2) > 0,$$

og at

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}.$$

Kort notation: $(X,Y) \sim N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

Marginalfordelinger

Simplere regninger opnås ved midlertidigt at indføre substitutionen $x-\mu_1 = \sigma_1 u$, $y-\mu_2 = \sigma_2 v$ i $f(x,y)$.

Nogle mellemregninger:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x-\mu_1 & y-\mu_2 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \sigma_1 u & \sigma_2 v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 u \\ \sigma_2 v \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{u}{\sigma_1} - \rho\frac{v}{\sigma_1} & -\rho\frac{u}{\sigma_2} + \frac{u}{\sigma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 u \\ \sigma_2 v \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\big(u^2 - 2\rho uv + v^2\big)^{\,1)} \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\big((1-\rho^2)u^2 + (v-\rho u)^2\big) \\
&= u^2 + \frac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2}
\end{aligned}$$

Bestemmelse af marginalfordelingen for X:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x(u),y(v))\sigma_2 dv, \quad \text{idet } dy = \sigma_2 dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(u^2 + \frac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2}\Big)\Big)\sigma_2 dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\Big(-\frac{1}{2}u^2\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\Big)dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\Big(-\frac{1}{2}u^2\Big)\cdot 1,
\end{aligned}$$

idet funktionen under det sidste integraltegn ses at være tæthedsfunktion for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi ρu og varians $1-\rho^2$.

Ved tilbagesubstitution $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ får vi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\Big(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\Big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dvs. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Analogt får vi $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Bemærk, at de første fire parametre i den todimensionale normalfordeling hermed har fået en tolkning.

Vedrørende den sidste parameter ρ kan vi foreløbig iagttage, at

$$\begin{aligned}
\rho = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ og } Y \text{ uafhængige}, \\
\rho \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ og } Y \text{ afhængige}.
\end{aligned}$$

En betinget fordeling

Vi betinger med $X = x$ og udnytter samme midlertidige substitution som i det foregående afsnit:

$$\begin{aligned}
f_{Y|x}(y) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x(u),y(v))}{f_X(x(u))} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big(-\dfrac{1}{2}\Big(u^2+\dfrac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2}\Big)\Big)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\Big(-\dfrac{1}{2}u^2\Big)}
\end{aligned}$$

[1]Tilbagesubstitution $u = \frac{z-\mu_1}{\sigma_1}$, $v = \frac{z-\mu_2}{\sigma_2}$ i dette udtryk giver

$$\frac{1}{1-\rho^2}\Big(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big),$$

som tillige med udregningen af det Σ indføres i den simultane tæthedsfunktion $f(x,y)$. Herved kommer $f(x,y)$ på en form, som ofte benyttes:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\Big), && u = \tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\
& && v = \tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}{2(1-\rho^2)}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{(y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\Big), && y \in \mathbb{R} \\
& && x \text{ fast}
\end{aligned}
$$

Heraf ses, at

$$Y|x \sim N\big(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\big).$$

$\mathrm{E}[Y|x]$ som funktion af x kan opfattes som X's bidrag til en systematisk indvirkning på Y og med $\mathrm{Var}(Y|x)$ som udtryk for en tilfældig overlejret virkning. Under denne synsvinkel kaldes $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ residualvariansen. Bemærk, at $\sigma_2^2(1-\rho^2) < \sigma_2^2$, og at residualvariansen ikke afhænger af x.

Lader vi i residualvariansen ρ gå mod 1 eller -1, får vi grænseværdien 0, hvoraf følger

$$P(Y|x = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)) \to 1.$$

Hele sandsynlighedsmassen bliver altså i grænsen koncentreret på linien

$$y = \mu_2 \pm \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),$$

som har hældning $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ for $\rho \to 1$ og hældning $-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ for $\rho \to -1$.

Den bedste prædiktor $g(X)$ for Y, dvs. den prædiktor der minimerer $\mathrm{E}[(Y-g(X))^2]$, er $\mathrm{E}[Y|X]$ [2)]. Fra udtrykket for fordelingen af $Y|x$ ovenfor ser vi, at

$$\mathrm{E}[Y|X] = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1).$$

For den todimensionale normalfordeling gælder altså, at den bedste prædiktor samtidig er den bedste lineære prædiktor.

Tolkning af parameteren ρ

Ved at benytte fordelingsresultatet for $Y|x$ på de standardiserede variable $U = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$ og $V = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$ får vi

$$V|u \sim N(\rho u, 1-\rho^2),$$

og dermed $\mathrm{E}[V|U] = \rho U$.

Kovariansen mellem U og V udregnes:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{E}[UV] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[UV|U]] = \mathrm{E}[U\,\mathrm{E}[V|U]] \\
&= \mathrm{E}[U\rho U] = \rho\,\mathrm{E}[U^2] = \rho\,\mathrm{Var}\,U = \rho.
\end{aligned}
$$

[2)] $\forall x : \mathrm{E}[(Y-g(X))^2|\, x] = \mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y]+\mathrm{E}[Y]-g(X))^2|\, x] = \mathrm{Var}[Y|x] + (\mathrm{E}[Y|x]-g(x))^2$

Dernæst udregnes kovariansen mellem $X = \sigma_1 U + \mu_1$ og $Y = \sigma_2 V + \mu_2$:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(\sigma_1 U + \mu_1, \sigma_2 V + \mu_2) = \sigma_1\sigma_2 \operatorname{Cov}(U,V) = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

og endelig korrelationen mellem X og Y:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X}\sqrt{\operatorname{Var} Y}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

Parameteren ρ er altså korrelationskoefficienten mellem X og Y.
De tidligere udsagn om afhængighed/uafhængighed af X og Y kan nu omformuleres til:

X og Y er uafhængige, når og kun når X og Y er ukorrelerede.

Dette resultat er unikt for normalfordelte variable. I almindelighed gælder kun, at uafhængige variable er ukorrelerede.

Niveaukurver for $f(x,y)$ når $\rho = 0$

Med $\rho = 0$ har vi

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big)\Big),$$

og dermed for $0 < k < (2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-1}$

$$\begin{aligned} f(x,y) = k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = -2\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2 k) = k_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-\mu_1)^2}{(\sigma_1\sqrt{k_1})^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{(\sigma_2\sqrt{k_1})^2} = 1. \end{aligned}$$

Heraf ses, at niveaukurverne er ligedannede ellipser med centrum i (μ_1, μ_2) og med halvakser $\sigma_1\sqrt{-2\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2 k)}$ og $\sigma_2\sqrt{-2\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2 k)}$ parallelle med koordinatsystemets akser. Ellipsernes ekscentricitet [3] er

$$e = \frac{\sqrt{|\sigma_1^2 - \sigma_2^2|}}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}}$$

uafhængig af k. For $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ er niveaukurverne cirkler med centrum i $(0,0)$ og radius $\sigma\sqrt{-2\ln(2\pi\sigma^2 k)}$.

Niveaukurver for $f(x,y)$ når $\rho \neq 0$

Her bliver ligningen for niveaukurverne mere kompliceret. Med $0 < k < (2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1}$ får vi

$$f(x,y) = k \quad \Leftrightarrow$$

[3] Ekscentriciteten e i en ellipse er forholdet mellem brændpunktsafstanden og storaksen. Udtrykt ved den halve storakse a og den halve lilleakse b gælder $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$.

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = -2(1-\rho^2)\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}k) = k_1.$$

Ved at indføre substitutionen $x-\mu_1 = x_1$, $y-\mu_2 = y_1$ får vi ligningen udtrykt i et akseparallelt x_1y_1-koordinatsystem med origo i $(x,y)=(\mu_1,\mu_2)$. Ligningen bliver

$$\frac{1}{\sigma_1^2}x_1^2 - 2\frac{\rho}{\sigma_1^2\sigma_2^2}x_1y_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}y_1^2 = k_1.$$

Bemærk, at venstre side er en kvadratisk form, som kan repræsenteres af en symmetrisk matrix:

$$\frac{1}{\sigma_1^2}x_1^2 - 2\frac{\rho}{\sigma_1^2\sigma_2^2}x_1y_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}y_1^2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Ved at løse egenværdiproblemet for matricen, kan vi omforme den kvadratiske form til en form med rene kvadratled.

Egenværdierne bestemmes til

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \pm \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\Big)^{4)},$$

og egenvektorerne hørende hhv. til den mindste egenværdi λ_1 og den største egenværdi λ_2 findes som

$$\boldsymbol{v}_1 = t_1\Big(\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}\ ,\ \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\Big)^{5)}, \qquad t_1 \neq 0,$$

og

$$\boldsymbol{v}_2 = t_2\Big(-\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\Big) - \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ ,\ \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}\Big)^{6)}, \qquad t_2 \neq 0.$$

---

4) Mellemregninger:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \lambda & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\lambda - \frac{1}{\sigma_2^2}\lambda + \lambda^2 - \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} = \lambda^2 - \Big(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\Big)\lambda + \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}(1-\rho^2) = 0$$

$$d = \Big(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\Big)^2 - 4\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}(1-\rho^2) = \Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\Big)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

5) Rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{2}\Big(-(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}) + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) & \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}} & -\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) Rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} - \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{2}\Big(-(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}) - \sqrt{(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\ \Big) \end{bmatrix} \sim$$

Som kontrol på regningerne ses, at $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$. I et x_2y_2-koordinatsystem med basisvektorerne $\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ og $\frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}$ og med samme origo som i x_1y_1-koordinatsystem kan den kvadratiske form udtrykkes som $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2$. Ligningen for niveaukurverne bliver

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{k_1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{k_1}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

Heraf ses, at niveaukurverne er ligedannede ellipser med centrum i $(x, y) = (\mu_1, \mu_2)$ og med den halve storakse og lilleakse hhv.

$$\sqrt{\frac{k_1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{-4(1-\rho^2)\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}k)}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}}}$$

og

$$\sqrt{\frac{k_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{-4(1-\rho^2)\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}k)}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}}}.$$

I forhold til xy-koordinatsystemet ligger x_2y_2-koordinatsystemet drejet med vinklen

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\rho}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\right)\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{2\rho\sigma_1\sigma_2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Bemærk, at $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ for $0 < \rho < 1$, og at $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ for $-1 < \rho < 0$.

Ved benyttelse af formlen $\tan 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$ [7] kan udtrykket for φ simplificeres til

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}\right), & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \sigma_1^2 = \sigma_2^2. \end{cases}$$

Ellipsernes ekscentricitet er

$$e = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}}}$$

uafhængig af k.

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\right) \\ -\frac{\rho}{\sigma_1^2\sigma_1^2} & \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}}\right) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_1\sigma_2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[7]

$$\begin{aligned}\tan 2\varphi &= \frac{2\frac{1}{2\rho\sigma_1\sigma_2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}{1 - \frac{1}{(2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\left((\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + 2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\sqrt{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2} + (\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2\right)} \\ &= \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}{-(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)} = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}\end{aligned}$$

Øvelse. Vis, at for $\rho = 0$ bliver udtrykket for ekscentriciteten identisk med det tidligere fundne udtryk. $\square$

Øvelse. Vis, at for $\sigma_1 = \sigma_2$ bliver ekscentriciteten $\sqrt{\frac{2|\rho|}{1+|\rho|}}$. $\square$

Transformation til uafhængige variable

Ved omformningen af den kvadratiske form i tæthedsfunktionen for $f(x, y)$ introducerede vi et basisskift med basisskiftmatrix $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Vinklen φ blev bestemt til $\arctan\left(\frac{1}{2\rho\sigma_1\sigma_2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)\right)$.

Udnyttes formlen $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ [8)], kan $\sin\varphi$ findes, hvorefter også $\cos\varphi$ kan bestemmes. Vi får

$$\sin\varphi = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{(2\rho\sigma_1\sigma_2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(2\rho\sigma_1\sigma_2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}}.$$

Øvelse. Eftervis udtrykket for $\cos\varphi$. $\square$

Sammenhængen mellem koordinaterne i hhv. x_1y_1- og i x_2y_2-koordinatsystemet er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

hvoraf

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Vi vil nu bestemme tæthedsfunktionen for den todimensionale stokastiske variabel (X_2, Y_2). Ved substitution i tæthedsfunktionen for (X, Y) får vi

$$f(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2)\right)|1|,$$

idet $J(x_2, y_2) = 1$. Kan dette udtryk ækvivalere den simultane tæthed for to uafhængige normalfordelte variable? I givet fald må der også gælde, at

$$f(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_3\sigma_4} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{\sigma_3^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_4^2}\right)\right).$$

---

8)

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \frac{\frac{1}{2\rho\sigma_1\sigma_2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{(2\rho\sigma_1\sigma_2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sqrt{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2)^2}\right)}} \end{aligned}$$

Ved at sammenholde de to udtryk for $f(x_2, y_2)$ aflæses kravene

$$\sigma_3\sigma_4 = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

og

$$\frac{1}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{1-\rho^2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{1-\rho^2}\Big(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\Big).$$

Indsættes $\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_3^2\sigma_4^2}$ fra den første ligning i den sidste ligning, kan denne erstattes af

$$\sigma_3^2 + \sigma_4^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Herefter løses ligningerne mht. σ_3^2 og σ_4^2:

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Big),$$
$$\sigma_4^2 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Big).$$

Øvelse. Vis, at løsningen bliver som angivet. □

Vi kan altså konkludere, at X_2 og Y_2 er uafhængige, og at

$$X_2 \sim N(0, \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Big)),$$
$$Y_2 \sim N(0, \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Big)).$$

Lineære transformationer af (X, Y)

Vedrørende lineære transformationer af $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ i almindelighed, herunder linearkombinationer af X og Y, henvises til afsnit 3 i note om den flerdimensionale normalfordeling.

23.6.2011/BR