

Variabelskift i plan- og rumintegraler

1 Jacobideterminanter

Betragt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, hvor $F = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

De partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, kan naturligt arrangeres i en $m \times n$ matrix, den såkaldte Jacobimatrix.

Når $m = n$, bliver Jacobimatricen kvadratisk. Den tilhørende determinant kaldes Jacobideterminanten og noteres $J(x_1, \dots, x_n)$ eller $\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$. Vi har altså

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Når F er enetydig, kan en invers afbildning F^{-1} bestemmes. Endvidere når $J(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, gælder om Jacobideterminanterne for F og F^{-1} , at

$$J_{F^{-1}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{J_F(x_1, \dots, x_n)}, \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

eller med den alternative skrivemåde

$$\frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)} = 1.$$

Eksempel. Skift fra rektangulære til polære koordinater.

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad ^1)$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

¹⁾ Betegnelsen \arctan dækker over flere funktionsgrene. Fortegnskombinationen af x og y bestemmer, hvilken gren der benyttes.

Inverst koordinatskifte:

$$F^{-1} :]0; \infty[\times]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Kontrol : $J(x, y) J(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} r = \frac{1}{r} r = 1$

Eksempel. Skift fra rektangulære til sfæriske koordinater.

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(\rho, \varphi, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad 2)$$

Her er det regneteknisk det enkleste først at bestemme Jacobideterminanten hørende til det inverse koordinatskifte:

$$F^{-1} :]0; \infty[\times]0; \pi[\times]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi),$$

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \dots = \rho^2 \sin \varphi,$$

hvorefter

$$J(x, y, z) = \frac{1}{J(\rho, \varphi, \theta)} = \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} = \frac{1}{(\rho \sin \varphi) \rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Eksempel. Betragt den lineære transformation $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Idet $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, har vi umiddelbart $J(\mathbf{x}) = \det A$, og for den inverse transformation $F^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$, får vi $J(\mathbf{y}) = \det A^{-1}$.

2 Variabelskift i planintegraler

Betragt

$$\int_D f(x, y) dA \quad \text{samt} \quad G = (g_1, g_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) = (g_1(x, y), g_2(x, y)),$$

hvor G er enentydig. Der gælder

$$\int_D f(x, y) dA_{xy} = \int_{G(D)} f \circ G^{-1}(u, v) |J_{G^{-1}}(u, v)| dA_{uv}.$$

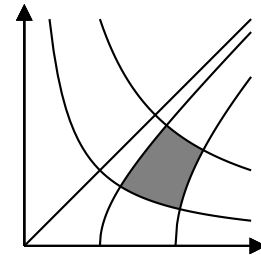
Bemærk, at det er den numeriske værdi af Jacobideterminanten hørende til den inverse afbildning, som indgår i formlen.

²⁾Se fodnote 1.

Eksempel.

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} |r| dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi \left[e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

Eksempel. Inertimomentet mht. $(0,0)$ af et plant område D med densitet 1 beliggende i første kvadrant mellem hyperblerne $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ og $x^2 - y^2 = 4$.



$$I_0 = \int_D (x^2 + y^2) dA$$

Sæt $u = xy$ og $v = x^2 - y^2$, hvorefter

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2).$$

Bemærk, at

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = v^2 + 4u^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{4u^2 + v^2},$$

hvorefter

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{-2(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{2\sqrt{4u^2 + v^2}},$$

og dermed at

$$I_0 = \int_1^3 \int_1^4 \sqrt{4u^2 + v^2} \left| -\frac{1}{2\sqrt{4u^2 + v^2}} \right| dv du = \frac{1}{2}(3-1)(4-1) = 3.$$

3 Variabelskift i rumintegraler

Betragt

$$\int_D f(x, y, z) dV \quad \text{samt} \quad G = (g_1, g_2, g_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v, w) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z)),$$

hvor G er enentydig. Der gælder

$$\int_D f(x, y, z) dV_{xyz} = \int_{G(D)} f \circ G^{-1}(u, v, w) |J_{G^{-1}}(u, v, w)| dV_{uvw}.$$

Eksempel. Inertimomentet om z -aksen af en kugle K med radius a og densitet 1 er $I_z = \int_K (x^2 + y^2) dV$. Ved skift til sfæriske koordinater får vi

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \sin^2 \varphi |\rho^2 \sin \varphi| d\rho d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \int_0^a \rho^4 \sin^3 \varphi d\rho d\varphi \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^a = \frac{8\pi a^5}{15}. \end{aligned}$$

1.3.2013/BR