UNIVERSITÉ DU SUD TOULON-VAR

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme d'

Habilitation à diriger des recherches

en sciences

Spécialité: Mathématiques

Avec le titre:

Sur quelques problèmes spectraux et de transport dans la Mécanique Statistique Quantique

par

Horia D. CORNEAN

qui sera examiné le 15/05/2006 devant le jury composé de:

P. Duclos, B. Helffer, G. Nenciu, C-A. Pillet, V. A. Zagrebnov,

après les rapports de:

B. Helffer, H. Spohn, V. A. Zagrebnov.

Contents

1	Intr	roduction	3		
	1.1	Liste des publications décrite dans le mémoire	3		
	1.2	Liste complète des publications	4		
2	Théorie spectrale pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac				
	ave	c champ magnétique à longue portée	6		
3	Mécanique statistique quantique pour des systèmes magnétiques				
	à gr	rand nombres de particules	10		
	3.1	Limite thermodynamique pour les susceptibilités magnétiques	10		
		généralisées d'un gaz quantique	10		
		3.1.1 L'ensemble grand-canonique	11		
		3.1.2 La pression et la densite grand-canonique	11		
	2.0	3.1.3 L'ensemble canonique	14		
	3.2	L'étude de la condensation de Bose-Einstein dans un champ	15		
		magnetique	10		
4	Phénomènes de transport quantique dans des systèmes méso				
	et n	nacroscopiques	20		
	4.1	Transport quantique dans des systèmes mésoscopiques	20		
		4.1.1 La formule de Landauer-Büttiker	21		
		4.1.2 Transport résonant dans un point quantique	23		
	4.2	La rotation de Faraday	24		
		4.2.1 La réponse linéaire et la limite thérmodynamique	25		
		4.2.2 La formule de Widom et Streda	27		
		4.2.3 Le cas des électrons libres	28		
		4.2.4 La constante de Verdet	28		
5	Propriétés spectrales des nanotubes de carbone				
	5.1	Trois particules sur la ligne	31		
		5.1.1 La séparation du centre de masse	32		
		5.1.2 Réduction par symétrie	33		
		5.1.3 Les résultats \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	34		
6	La	bibliographie	35		

1 Introduction

Je présenterai ici une vue d'ensemble sur quelques sujets de ma recherche, et après je donnerai la liste des publications que je soumets pour obtenir l'habilitation à diriger les recherches.

Le travail présenté ici peut être divisé en quatre catégories:

- 1. Théorie spectrale pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac avec champ magnétique à longue portée. Il s'agit ici de l'étude de la localisation du spectre dans la situation où la perturbation magnétique n'est pas relativement bornée par rapport à l'Hamiltonien non perturbé. Le papier concerné est [BC], qui est une continuation du travail commencé pendant la première thèse;
- 2. Mécanique statistique quantique pour des systèmes magnétiques à grand nombre de particules. Il s'agit ici de l'étude de la limite thermodynamique de la pression, la magnétisation et les susceptibilités généralisées d'un gaz quantique parfait [C, BCL] d'un côté, et l'étude de la condensation de Bose-Einstein de l'autre [BCZ];
- 3. Phénomènes de transport quantique dans des systèmes méso et macroscopiques. Il s'agit ici de l'étude de la conductivité électrique dans le régime de la réponse linéaire pour des systèmes couplés avec plusieurs réservoirs d'énergie et particules. Le but est d'obtenir une preuve pour la formule de Landauer-Büttiker [CJM 1,2] d'un côté, et d'étudier l'effet Faraday de l'autre [CNP];
- 4. *Propriétés spectrales des nanotubes de carbone*. Les propriétés des nanotubes dépendent de leur rayon et de leur chiralité. Nous proposons un modèle de trion dans un nanotube de carbone [CDR] et étudions quels sont ses états liés.

1.1 Liste des publications décrite dans le mémoire

[BC] Briet, Ph., Cornean, H.D.: Locating the spectrum for magnetic Schrödinger and Dirac operators, *Comm. P.D.E.* **27** (5-6), 1079–1101 (2002)

[C] Cornean, H.D.: On the magnetization of a charged Bose gas in the canonical ensemble, *Commun. Math. Phys.* **212**, 1-27 (2000)

[BCL] Briet, Ph., Cornean, H.D., Louis, D.: Generalized susceptibilities for a perfect quantum gas, *Markov Proc. Related Fields*, **11**, 177–188 (2005) [BCZ] Briet, Ph., Cornean, H.D., Zagrebnov, V.A.: Do bosons condense in a homogeneous magnetic field? J. Statist. Phys. **116** (5), 1545-1578 (2004)

[CJM 1] Cornean, H.D., Jensen, A., Moldoveanu, V.: A rigorous proof of the Landauer-Büttiker formula, J. Math. Phys. 46 042106 (2005)

[CJM 2] Cornean, H.D., Jensen, A., Moldoveanu, V.: The Landauer-Büttiker Formula and Resonant Quantum Transport, QMATH9 Proceedings, va apparaître;

[CNP] Cornean, H.D., Nenciu, G, Pedersen, T.G.: The Faraday effect revisited: General Theory, J. Math. Phys. 47 (2006)

[CDR] Cornean, H.D., Duclos, P., Ricaud, B.: On critical stability of three quantum charges interacting through delta potentials, *Few-Body Systems* (2006)

1.2 Liste complète des publications

1. Cornean, H.D., Nenciu G.: On eigenfunction decay of two dimensional magnetic Schroedinger operators. *Commun. Math. Phys.* **192**, 671-685 (1998)

2. Cornean, H.D.: On the essential spectrum of two dimensional periodic magnetic Schroedinger operators. *Lett. Math. Phys.* **49**, 197-211 (1999)

3. Cornean, H.D., Nenciu G.: Two dimensional magnetic Schroedinger operators: width of mini-bands in the tight-binding approximation. *Ann. Henri Poincaré* **1**, 203-222 (2000)

4. Cornean, H.D.: On the magnetization of a charged Bose gas in the canonical ensemble. *Commun. Math. Phys.* **212**, 1-27 (2000)

5. Briet, P., Cornean, H.D.: Locating the spectrum for magnetic Dirac and Schroedinger operators. *Commun. P.D.E.* **27**, 1079-1101 (2002)

6. Bisgaard, T.M., Cornean, H.D.: Nonexistence in general of a definitizing ideal of the desired codimension. *Positivity* **7**, 297-302 (2003)

7. Cornean, H.D.: Magnetic response in ideal quantum gases: the thermodynamic limit. *Markov Process. Related Fields* **9**, 547-566 (2003) 8. Beltita, I., Cornean, H.D.: On a theorem of Arne Persson. *CUBO* **6**, nr. 2, 1-14 (2004)

9. Cornean, H.D., Duclos, P., Pedersen, T.G.: One dimensional models of excitons in carbon nanotubes. *Few-Body Systems* **34**, 155-161 (2004)

10. Briet, Ph., Cornean, H.D., Zagrebnov, V.A.: Do bosons condense in a homogeneous magnetic field? J. Statist. Phys. 116, no. 5, 1545-1578 (2004)

11. Pedersen, T.G., Pedersen, K., Cornean, H.D., Duclos, P.: Stability and signatures of biexcitons in carbon nanotubes. *Nano Letters* **5**, no. 2, 291–294 (2005)

12. Cornean, H.D., Jensen, A., Moldoveanu, V.: A rigorous proof of the Landauer-Büttiker formula. *J. Math. Phys.*, **46**, no. 4, 042106, 28 pp, (2005)

13. Briet, Ph., Cornean, H.D., Louis, D.: Generalized susceptibilities for a perfect quantum gas. *Markov Process. Related Fields*, **11**, 177–188 (2005).

14. Cornean, H.D., Knudsen, K.: Reconstruction from one boundary measurement of a potential homogeneous of degree zero. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **13** no. 5, 413–425 (2005)

15. Cornean, H.D., Nenciu, G., Pedersen, T.G.: The Faraday effect revisited: General theory. J. Math. Phys. 47 no. 1, 23 pp, (2006)

16. Cornean, H.D., Jensen, A., Moldoveanu, V.: The Landauer-Büttiker formula and resonant quantum transport. Selected and Refereed Lectures from QMath9, *Springer Lecture Notes in Physics* **690**, 9 pp, (2006)

17. Cornean, H.D., Knudsen, K., Siltanen, S.: Towards a d-bar reconstruction method for three-dimensional EIT. A paraître dans *J. Inverse Ill-Posed Probl.*

18. Cornean, H.D., Duclos, P., Ricaud, B.: On critical stability of three quantum charges interacting through delta potentials. A paraître dans *Few-Body Systems*.

19. Cornean, H.D., Duclos, P., Ricaud, B.: Effective models for excitons in carbon nanotubes. A paraître dans *Ann. Henri Poincaré*.

2 Théorie spectrale pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac avec champ magnétique à longue portée

Quand on parle d'un champ magnétique à longue portée, on entend un champ qui ne décroît pas à l'infini. Il très bien connu qu'un tel champ peut avoir un potentiel vecteur magnétique associé qui croît à l'infini comme $|\mathbf{x}|$. La situation qu'on considéra ici suppose que le système "libre" (en l'absence du champ) n'est pas confiné. L'exemple typique est un électron dans un potentiel électrique périodique. Alors la perturbation magnétique n'est pas toujours relativement bornée au Hamiltonien libre.

Ce problème a été déjà traité par beaucoup d'autres auteurs, e.g [10, 11, 27, 33, 34, 36, 38, 50, 51, 52]. Une question centrale ici est la stabilité de la structure des bandes d'énergie/bandes interdites quand on allume la perturbation magnétique.

Dans notre travail [BC] on a reconsidéré ce problème en utilisant les méthodes de la théorie de la perturbation magnétique développées dans [51, 26, 24], de l'analyse multipuits [18, 34, 36], et des arguments du type Combes-Thomas [13]. Notre méthode nous permet d'améliorer la localisation du spectre pour une certaine classe des perturbations à longue portée. Nos résultats sont données en terme de quantités physiques, i.e. les champs magnétiques.

Nous donnons maintenant plusieurs détails techniques et les résultats. On commence avec le cas Schrödinger. Soit $H_0 = (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0)^2 + V$ l'opérateur non-perturbé défini sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \{2,3\}$, ou $\mathbf{p} = -i\nabla$ est l'impulsion, $\mathbf{a}_0 \in [C^2(\mathbb{R}^n)]^n$ est un potentiel vecteur magnétique, et V est un potentiel scalaire électrique qui est relativement borné au \mathbf{p}^2 avec la borne relative plus petite que 1 (ça implique la même propriété par rapport à $(\mathbf{p} - \mathbf{a}_0)^2$ via l'inégalité diamagnétique). Alors H_0 est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ [27]. On désigne par $\mathbf{B}_0 = \operatorname{rot}(\mathbf{a}_0)$ le champ magnétique avant la perturbation.

Si n = 3, on introduit un champ magnétique supplémentaire qu'on désigne par $\mathbf{B} \in [C^1(\mathbb{R}^3)]^3$, div $\mathbf{B} = 0$, tel que:

$$\max_{j \in \{1,2,3\}} \max_{|\alpha| \le 1} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{ |D^{\alpha} B_j|(\mathbf{x}) \} \le 1,$$
(2.1)

i.e. \mathbf{B} est à longue portée, ce qui signifie que toutes ses composantes avec leurs premières dérivées sont uniformément bornées.

Si n = 2, le champ magnétique a une seule composante non-nulle, celle suivant z. Ce vecteur est perpendiculaire au plan du mouvement, et il peut être représenté comme $(0, 0, B(x_1, x_2))$ où maintenant $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$. Avec cette identification, les formules ci-dessous sont vraies pour n = 2 et n = 3.

La jauge transversale (voir e.g. [68]) associée à **B** est définie comme suit

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds \ s \ \mathbf{B}(s\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} \ . \tag{2.2}$$

Nous voulons étudier la localisation du spectre de l'opérateur perturbé

$$H(b) = (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0 - b\mathbf{a})^2 + V, \qquad (2.3)$$

quand le paramètre réel b est assez petit.

Dans le cas Dirac, soit $H_0 = \alpha \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0) + \beta + V$ l'opérateur non-perturbé défini dans $[L^2(\mathbb{R}^3)]^4$, où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et β sont les matrices usuelles de Dirac. Le potentiel vecteur \mathbf{a}_0 appartient à $[C^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Pour simplifier les choses, on suppose que V est bornée.

L'opérateur perturbé sera

$$H(b) = \alpha \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0 - b\mathbf{a}) + \beta + V, \quad b \in \mathbb{R}$$
(2.4)

où le potentiel vecteur **a** est défini en (2.2). Alors H(b) et H_0 sont essentiellement auto-adjoints sur $[C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)]^4$ [68].

Notre premier résultat est donné dans le théorème suivant:

Théorème 2.1. On suppose que $\Delta = (\Delta_{-}, \Delta_{+}) \subset \mathbb{R}, \Delta_{-} < \Delta_{+}$ est une bande spectrale interdite de H_0 , i.e. Δ est contenu dans l'ensemble résolvant de H_0 , $\rho(H_0)$. On suppose aussi que $\Delta_{\pm} \in \sigma(H_0) \cup \{-\infty\}$. Soit $2/3 > \epsilon > 0$. Alors il existe une constante positive $b_0(\epsilon)$ tel que pour tous $\lambda \in \Delta$ avec dist $(\lambda, \sigma(H_0)) \geq b^{2/3-\epsilon}, 0 \leq b \leq b_0(\epsilon)$, on a que $\lambda \in \rho(H(b))$.

La constante $b_0(\epsilon)$ dépend fortement de l'énergie Δ_- , en particulier $b_0 \to 0$ quand $\Delta_- \to +\infty$. On remarque que si on utilise les techniques développées par Helffer-Sjöstrand [36] et Nenciu [51], on peut obtenir des résultats similaires à ceux-ci, mais avec l'exposant 1/2. Récemment Nenciu a obtenu une localisation de type $b \ln(b)$ pour un modèle discret (ce résultat n'est pas encore publié). La conjecture naturelle ici c'est que le vrai exposant devrait être égal à 1.

Notre résultat peut être amélioré quand on regarde la nature et localisation du spectre $\sigma(H(b))$ dans le voisinage d'une valeur propre discrète E_0 de H_0 .

On suppose maintenant que la multiplicité de E_0 est $M < \infty$. Il est connu qu'en général la théorie des perturbations analytiques ne fonctionne pas, i.e. la série Rayleigh-Schrödinger ne converge pas à b = 0 [17]. Mais la théorie des perturbations asymptotiques nous dit que si b est assez petit, alors H(b) a précisément M valeurs propres proches de E_0 , et dans le premier ordre de perturbation elles sont données par $E_j(b) = E_0 + be_j + o(b), j \in \{1, \ldots, M\}$ (voir le Théorème VIII 2.6, [43]).

Alors on a le théorème suivant:

Théorème 2.2. On suppose que les corrections du premier ordre $\{e_j\}_{j=1}^M$ sont toutes différentes. Alors on trouve deux constantes positives b_0 et C, telles que pour tous $0 < b < b_0$, chaque valeur propre $E_j(b)$ est donnée par une série absolument convergente:

$$E_j(b) = E_0 + \sum_{k \ge 1} b^k e_{j,k}(b)$$
(2.5)

 $o\hat{u} |e_{j,k}(b)| \leq C^k et \lim_{b \searrow 0} e_{j,1}(b) = e_j.$

Tous les coefficients qui apparaissent dans (2.5) admettent un développement asymptotique en puissances de b, et si on l'introduit dans (2.5), on obtient le développement asymptotique usuel de $E_i(b)$.

Un système hydrogénoïde perturbé par un champ magnétique faible (l'effet Zeeman) est un exemple intéressant dans lequel la condition $\{e_j\}_{j=1}^M$ est satisfaite.

En effet, on considère n = 3, $H_0 = -\Delta + V(\mathbf{x})$, $H(b) = (\mathbf{p} - b\mathbf{a})^2 + V(\mathbf{x})$ où V est un potentiel radial (qui dépend que de $|\mathbf{x}|$), $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 1/2(-x_2, x_1, 0)$ et b > 0. Il est bien connu que les valeurs propres discrètes de H_0 sont indexées par trois nombres quantiques: le nombre quantique "radial" $N = 1, 2, \ldots$, le nombre "angulaire" $l = 0, 1, \ldots, N-1$, et le nombre "magnétique" $-l \leq m \leq l$. On désigne les valeurs propres par $E_{N,l,m}$. La terminologie "angulaire" et "magnétique" provient du fait que H_0 commute avec le carré du moment cinétique total et avec toutes ses composantes. Le comportement générique des ces valeurs propres est qu'elles sont toujours dégénérées par rapport à m. Alors elles sont localisées dans des groupes à 2l + 1 valeurs propres qui sont toutes égales à $E_{N,l}$.

On suppose maintenant qu'il existe $N_0 \ge 2$ et $0 < l_0 \le N_0 - 1$ tel que E_{N_0,l_0} est isolée. Quand on calcule à la physicien les corrections du premier ordre en b, on écrit:

$$H(b) = H_0 + bL_3 + \mathcal{O}(b^2),$$

où L_3 est la troisième composante du moment cinétique total. Il est très bien connu que si l'on prend la restriction de L_3 sur l'image du projecteur qui correspond à E_{N_0,l_0} , alors L_3 a $M = 2l_0 + 1$ valeurs propres distinctes indexées par le nombre quantique m, et notre condition est satisfaite. \Box Maintenant nous allons présenter le dernier résultat de cette section. Parce que dans nos conditions V n'est pas nécessairement relativement compact par rapport à \mathbf{p}^2 , le spectre essentiel $\sigma_{ess}(H_0)$ peut avoir des trous non vides et ça c'est le cas intéressant. Nous voulons étudier la stabilité de tels trous quand le champ magnétique additionnel **B** s'annule arbitrairement lentement à l'infini. Nous présentons à cette fin la quantité ($R \geq 1$):

$$b_R := \max_{j \in \{1,2,3\}} \max_{|\alpha| \le 1} \sup_{|\mathbf{x}| \ge R} \{ |D^{\alpha} B_j|(\mathbf{x}) \}.$$
(2.6)

Nous disons que le champ magnétique tend vers zéro à l'infini si $\lim_{R\to\infty} b_R = 0$.

Définissez le potentiel vecteur \mathbf{a} comme dans (2.2). L'opérateur de Schrödinger

$$H(\mathbf{a}) = (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{a})^2 + V$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et Dirac

$$H(\mathbf{a}) = \alpha \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}) + \beta + V$$

sur $[L^2(\mathbb{R}^3)]^4$ sont essentiellement auto-adjoints sur $[C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)]$ et $[C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)]^4$ respectivement. Alors le résultat suivant est vrai:

Théorème 2.3. On suppose que le champ magnétique additionnel tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini; alors le spectre essentiel est stable:

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{a})) = \sigma_{ess}(H_0) \; .$$

Pour les opérateurs de Schrödinger, notre résultat est un cas particulier d'un résultat plus général d'Iftimie [38]. Mais notre preuve est plus simple et marche également bien dans les deux cas. \Box

Mécanique statistique quantique pour des 3 systèmes magnétiques à grand nombres de particules

3.1Limite thermodynamique pour les susceptibilités magnétiques généralisées d'un gaz quantique

Nous commençons par décrire le cadre mathématique et fixer quelques notations. Bien que la plupart des résultats soient vrais pour les deux types des statistique quantiques, dans ce qui suit nous considérons seulement des bosons.

Soit $\Lambda = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | -\frac{L}{2} < x_j < \frac{L}{2}, j \in \{1, 2, 3\} \}, L > 1$, une boite cubique centrée à l'origine. L'espace de Hilbert à une particule est $\mathcal{H}_{1,L}$:= $L^{2}(\Lambda)$; on désigne par $\mathcal{H}_{n,L}$ le sous-espace propre de $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{1,L} \cong L^{2}(\Lambda^{n})$ des fonctions complètement symétriques. On désigne par $\mathcal{H}_{0,L} = \mathbb{C}$ le sous-espace sans particules; alors l'espace de Fock est défini comme $\mathcal{F}_L :=$ $\bigoplus_{n>0} \mathcal{H}_{n,L}$. On peut introduire l'opérateur "nombre des particules" N_L qui coïncide avec la multiplication par n sur chaque sous-espace $\mathcal{H}_{n,L}$.

On suppose que les particules (chacune ayant la charge électrique e) sont soumises à un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B\mathbf{e_3}$, qui correspond à un potentiel vecteur $B\mathbf{a} = \frac{B}{2}\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{x}$. Si c désigne la vitesse de la lumière, définissez alors la fréquence de Larmor $\omega := (e/c)B$. L'Hamiltonien à "une particule" (noté $H_{1,L}(\omega)$) est l'extension de Friedrichs de l'opérateur positif et symétrique $\frac{1}{2}(-i\nabla - \omega \mathbf{a})^2$ défini sur $C_0^{\infty}(\Lambda)$. L'opérateur qui décrit nparticules s'écrit comme suit :

$$H_{n,L}(\omega) = H_{1,L}(\omega) \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes H_{1,L}(\omega).$$
(3.1)

Dans la deuxième quantification, l'Hamiltonien est noté $H_L(\omega)$ et coïncide

avec $H_{n,L}(\omega)$ sur $\mathcal{H}_{n,L}$. Soit $\beta = \frac{1}{k_B T} > 0$ et $z = \exp(\beta \mu)$ (la fugacité), où k_B est la constante de Boltzmann, T > 0 est la température, et $\mu \in \mathbb{R}$ est le potentiel chimique.

Comme il est bien connu, $H_{1,L}(\omega)$ est positif, non-borné, et à résolvante Ce qui implique que son spectre est purement discret avec un compacte. point d'accumulation à l'infini. D'ailleurs, le principe du minimax implique:

$$\inf \sigma(H_{1,L}(\omega)) \ge \inf \sigma(H_{1,\infty}(\omega)) = \frac{\omega}{2}.$$
(3.2)

On sait que le semigroupe $W_L(\beta, \omega) := \exp(-\beta H_{1,L}(\omega))$ est de classe de trace et admet un noyau intégral $G_{\omega,L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \beta)$ qui est continu dans les deux variables spatiales.

L'inégalité diamagnétique à volume fini (voir [19]) donne:

$$|G_{\omega,L}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\beta)| \le G_{0,L}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\beta) \le \frac{1}{(2\pi\beta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{2\beta}\right).$$
(3.3)

Si $\mathcal{I}_1(\mathbf{L}^2(\Lambda))$ désigne l'espace de Banach des opérateurs de classe de trace, il suit que:

$$||W_L(\beta,\omega)||_{\mathcal{I}_1} = \operatorname{Tr} \ W_L(\beta,\omega) \le \frac{L^3}{(2\pi\beta)^{3/2}}.$$
(3.4)

3.1.1 L'ensemble grand-canonique

Dénotez avec $\{E_j(\omega)\}_{j\in\mathbb{N}}$ l'ensemble de valeurs propres de $H_{1,L}(\omega)$. Si $\mu < 0$, la fonction de partition s'écrit comme:

$$\Xi_L(\beta, z, \omega) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{F}_L} \exp\left[-\beta (H_L(\omega) - \mu N_L)\right] = \prod_{j=0}^{\infty} [1 - z \exp\left(-\beta E_j(\omega)\right)]^{-1}.$$
(3.5)

Par $\ln(z)$ nous comprenons le logarithme limité à $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Soit \mathcal{C} un contour qui entoure l'origine et n'intersecte pas la coupure $[1,\infty)$, mais contient le spectre de zW_L , où $z \in \mathbb{C} \setminus [\exp(\beta \omega/2),\infty)$. Soit $q(\xi) = \frac{1}{\xi} \ln(1-\xi)$ une fonction analytique dans l'intérieur de \mathcal{C} . Définissez l'opérateur suivant:

$$q(zW_L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} d\xi \ q(\xi) (\xi - zW_L)^{-1}.$$
 (3.6)

Il est facile de voir que $\ln(1 - zW_L) = zW_L \cdot q(zW_L)$, et en employant (3.5) on obtient:

$$\ln \Xi_L(\beta, z, \omega) = -\text{Tr} \left(zW_L \cdot q(zW_L) \right).$$
(3.7)

De l'expression ci-dessus on peut montrer que le potentiel grand-canonique (vue en fonction de z) est analytique dedans $\mathbb{C} \setminus [\exp(\beta \omega/2), \infty)$. Quand |z| < 1, (3.7) devient:

$$\ln \Xi_L(\beta, z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{Tr} (W_L^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left(\int_{\Lambda} d\mathbf{x} \, G_{\omega, L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; n\beta) \right). \quad (3.8)$$

3.1.2 La pression et la densité grand-canonique

On définit:

$$P_L(\beta, z, \omega) := \frac{1}{\beta L^3} \ln \Xi_L(\beta, z, \omega) = -\frac{1}{\beta L^3} \sum_j \ln \left(1 - z e^{-\beta E_j(\omega)}\right), \quad (3.9)$$

 et

$$\rho_L(\beta, z, \omega) := \beta z \frac{\partial P_L}{\partial z}(\beta, z, \omega).$$
(3.10)

La preuve de la limite thermodynamique pour ces deux quantités retourne au moins à Angelescu et Corciovei [3]. On écrit ($\omega > 0$):

$$P_{\infty}(\beta, z, \omega) := \omega \frac{1}{(2\pi\beta)^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3/2} \left(z e^{-(k+1/2)\omega\beta} \right), \qquad (3.11)$$

 et

$$\rho_{\infty}(\beta, z, \omega) := \beta z \frac{\partial P_{\infty}}{\partial z}(\beta, z, \omega) = \beta \omega \frac{1}{(2\pi\beta)^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1/2} \left(z e^{-(k+1/2)\omega\beta} \right),$$
(3.12)

où $g_{\sigma}(\zeta)$ sont les fonctions de Bose:

$$g_{\sigma}(\zeta) = \frac{\zeta}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty dt \; \frac{t^{\sigma-1} e^{-t}}{1 - \zeta e^{-t}},\tag{3.13}$$

analytiques dans $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ et si $|\zeta| < 1$, elles sont données par:

$$g_{\sigma}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n^{\sigma}} \, .$$

Alors le résultat suivant est vrai (voir [3]):

Théorème 3.1. Soit $K \subset \mathbb{C} \setminus [\exp(\beta \omega/2), \infty)$ être un ensemble compact. Alors la pression et la densité grand-canonique admettent la limite thermodynamique:

$$\lim_{L \to \infty} \sup_{z \in K} |P_L(\beta, z, \omega) - P_\infty(\beta, z, \omega)| = 0, \qquad (3.14)$$

et

$$\lim_{L \to \infty} \sup_{z \in K} |\rho_L(\beta, z, \omega) - \rho_\infty(\beta, z, \omega)| = 0.$$
(3.15)

Parce que P_L et ρ_L sont des fonctions analytiques dans z, alors par la formule intégrale de Cauchy il suit que tous leurs dérivés complexes admettent une limite qui est uniforme sur des compactes. En particulier:

$$\lim_{L \to \infty} \sup_{z \in K} \left| \frac{\partial \rho_L}{\partial z} (\beta, z, \omega) - \frac{\partial \rho_\infty}{\partial z} (\beta, z, \omega) \right| = 0.$$
(3.16)

On peut voir de (3.12) qu'on a $\lim_{x \neq e^{\beta \omega/2}} \rho_{\infty}(\beta, x, \omega) = \infty$, ce qui signifie que la condensation de Bose est absente si $\omega_0 \neq 0$. Par conséquent la relation entre la fugacité et densité peut être inversée pour toutes les températures.

Si $0 < x_{\infty}(\beta, \rho, \omega) < e^{\beta \omega/2}$ est la solution positive unique de l'équation $\rho_{\infty}(\beta, x, \omega) = \rho$ et si $x_L(\beta, \rho, \omega)$ est la solution positive unique qui résout $\rho_L(\beta, x, \omega) = \rho$, alors $\lim_{L\to\infty} x_L = x_{\infty}$. Nous faisons maintenant la transformation de Legendre au volume fini:

$$\tilde{f}_L(\beta,\rho,\omega) := -P_L(\beta, x_L(\beta,\rho,\omega),\omega) + \frac{\rho}{\beta} \ln x_L(\beta,\rho,\omega).$$
(3.17)

Alors on a que \tilde{f}_L a une limite:

$$f_{\infty}(\beta,\rho,\omega) := -P_{\infty}(\beta, x_{\infty}(\beta,\rho,\omega),\omega) + \frac{\rho}{\beta} \ln x_{\infty}(\beta,\rho,\omega).$$
(3.18)

On désigne par $\frac{\partial W_L}{\partial \omega}(\beta, \omega_0)$ l'intégrale suivante qui est définie dans la topologie de la norme du $B(L^2(\Lambda))$:

$$-\int_{0}^{\beta} d\tau W_{L}(\beta - \tau, \omega_{0}) \left[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} - \omega_{0} \mathbf{a}) \right] W_{L}(\tau, \omega_{0}).$$
(3.19)

On peut démontrer (voir [2]) que $\frac{\partial W_L}{\partial \omega}(\beta, \omega_0)$ est même dans la classe de trace. La magnétisation grand-canonique est définie comme

$$\Gamma_L(\beta, z, \omega_0) := -\frac{e}{c} \frac{\partial P_L}{\partial \omega}(\beta, z, \omega_0) = -\frac{e}{c\beta L^3} \operatorname{Tr} \left[(1 - zW_L(\beta, \omega_0))^{-1} \frac{\partial W_L}{\partial \omega} \right].$$
(3.20)

On a démontré dans [C] que sa limite thermo-dynamique est:

$$\Gamma_{\infty}(\beta, z, \omega_0) := -\frac{e}{c} \frac{\partial P_{\infty}}{\partial \omega}(\beta, z, \omega_0).$$
(3.21)

Plus généralement, on peut écrire un développement pour la pression grandcanonique de la forme:

$$P_L(\beta, z, \omega) \sim P_L(\beta, z, \omega_0) + \sum_{n \ge 1} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \frac{\partial^n P_L}{\partial \omega^n}(\beta, z, \omega_0)$$
(3.22)

où ω est dans un petit intervalle autour de $\omega_0 > 0$; on définit

$$\chi_L^{(n)}(\beta, z, \omega_0) := \frac{\partial^n P_L}{\partial \omega^n}(\beta, z, \omega_0), \quad \chi_\infty^{(n)}(\beta, z, \omega_0) := \frac{\partial^n P_\infty}{\partial \omega^n}(\beta, z, \omega_0), \quad n \ge 1.$$
(3.23)

Nous pouvons maintenant formuler une question précise:

Question 3.2. Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $\omega_0 \geq 0$. Soit $K \subset \mathbb{C} \setminus [e^{(\beta \omega/2)}, \infty)$ un ensemble compact. Est il alors vrai que

$$\lim_{L \to \infty} \sup_{z \in K} |\chi_L^{(n)}(\beta, z, \omega_0) - \chi_\infty^{(n)}(\beta, z, \omega_0)| = 0 \quad ?$$

Quelques réponses:

- Angelescu *et al* '75 [2]: si $\omega_0 = 0$ et n = 1, 2 alors oui;
- Macris *et al* '97 [46]: si $\omega_0 \ge 0$, |z| < 1 et n = 1 alors oui;
- Cornean '00 [C]: si $\omega_0 \ge 0$ et n = 1 alors oui;
- Briet *et al*' 05 [BCL]: la réponse est oui dans tous les cas.

3.1.3 L'ensemble canonique

En travaillant dans l'ensemble canonique, on considère que la densité des particules ρ est constante, donc le nombre de particules est défini comme $N(L) := \rho L^3$. La fonction de partition canonique de notre système est:

$$Z_L(\beta, \rho, \omega) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_{N(L),L}} \exp\left(-\beta H_{N(L),L}(\omega)\right).$$
(3.24)

Le lien avec Ξ_l est contenu dans l'égalité suivante:

$$\Xi_L(\beta, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_{n,L}} \exp\left[-\beta H_{n,\Lambda}\right].$$
(3.25)

En employant (3.25), (3.9) et (3.24), on peut écrire:

$$Z_L(\beta,\rho,\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} d\xi \, \frac{1}{\xi} \left[\frac{\exp\left(\frac{\beta}{\rho} P_L(\beta,\xi,\omega)\right)}{\xi} \right]^{N(L)}, \qquad (3.26)$$

où C_1 est un contour qui entoure l'origine et évite la coupure. L'énergie libre réduite peut être écrite comme:

$$f_L(\beta, \rho, \omega) := -\frac{1}{\beta L^3} \ln Z_L(\beta, \rho, \omega).$$
(3.27)

Nous pouvons demander l'existence d'un développement de la forme:

$$f_L(\beta,\rho,\omega) \sim f_L(\beta,\rho,\omega_0) + \sum_{n\geq 1} \frac{(\omega-\omega_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f_L}{\partial \omega^n}(\beta,\rho,\omega_0)$$
(3.28)

avec les notations (voir aussi (3.18)):

$$m_L^{(n)}(\beta,\rho,\omega_0) := \frac{\partial^n f_L}{\partial \omega^n}(\beta,\rho,\omega_0), \qquad m_\infty^{(n)}(\beta,\rho,\omega_0) := \frac{\partial^n f_\infty}{\partial \omega^n}(\beta,\rho,\omega_0).$$
(3.29)

Question 3.3. Soit $n \ge 1$ un nombre entier, $\omega_0 \ge 0$, $\rho, \beta > 0$. Est il alors vrai que

$$\lim_{L \to \infty} |m_L^{(n)}(\beta, \rho, \omega_0) - m_\infty^{(n)}(\beta, \rho, \omega_0)| = 0 \quad ?$$

Quelques réponses:

- Angelescu *et al* '75 [2]: si les particules sont des fermions, $\omega_0 = 0$ et n = 1, 2 alors "oui"; les guillemets indiquent qu'ils ont seulement étudié des quantités liées à la transformation de Legendre à volume fini (voir (3.17)).
- Cornean '00 [C]: si les particules sont des fermions, $\omega_0 > 0$ et n = 1 alors oui;
- Louis [45]: la réponse est oui dans toutes les situations pour des bosons à $\omega_0 > 0$.

3.2 L'étude de la condensation de Bose-Einstein dans un champ magnétique

Le modèle mathématique d'un gaz idéal de bosons chargés a été inventé il y a cinquante ans par Schafroth [61] afin d'étudier l'effet de Meissner-Ochsenfeld. Dans ce modèle nous voyons également que la condensation est absente si le système est soumis à un champ magnétique constant, à moins que la dimensionnalité du problème soit plus grande ou égale à 4 (voir e.g [48]).

Le premier résultat rigoureux dans cette direction était dû à Angelescu et Corciovei [3] qui ont étudié les gaz parfaits de Bose et de Fermi. Un de leurs résultats est un théorème interdisant la condensation de Bose-Einstein (BEC) du gaz idéal des bosons chargés dans la dimension d = 3. Nous pouvons maintenant lier leurs résultats au comportement de la densité intégrée des états près du fond du spectre de l'opérateur Schrödinger à une particule.

Le but de notre papier est de trouver un potentiel électrique qui peut reconstituer le BEC pour d = 3. Motivé par des expériences récentes avec les réseaux optiques (voir par exemple [14] et des références là-dedans) nous construisons une classe des potentiels extérieurs périodiques avec cette propriété.

Nous décrivons maintenant notre modèle mathématique. Notons $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^d$ un domaine ouvert et convexe avec une frontière C^{∞} . Ici d = 2, 3. Nous supposons que le domaine contient l'origine. La boîte qui enferme notre gaz est modèlisée par (L > 1):

$$\Lambda_L := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \mathbf{x}/L \in \Lambda_1 \}.$$
(3.30)

Dans cet article nous considérons des potentiels extérieurs périodiques par rapport à \mathbb{Z}^d (i.e. pour chaque $\gamma \in \mathbb{Z}^d, V(\mathbf{x} + \gamma) = V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$). Ici V_L désigne la restriction de V à Λ_L . Si d = 3, on considère également un potentiel vecteur magnétique de la forme:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{a}_0(\mathbf{x}), \quad \omega \ge 0 \tag{3.31}$$

où $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}) = 1/2(-x_2, x_1, 0)$ est la jauge symétrique.

L'opérateur qui décrit une particule est donné par:

$$h_L = h_L(\omega) = (-i\nabla - \mathbf{a})^2 + V_L,$$
 (3.32)

avec des conditions Dirichlet à la frontière. Plus précisément, ceci signifie qu'il est auto-adjoint sur le domaine $H_0^1(\Lambda_L) \cap H^2(\Lambda_L)$. Alors h_L a seulement du spectre discret, et on désigne les valeurs propres par $\{E_j\}_{j\geq 1}$, et les fonctions propres correspondantes par $\{u_j\}_{j\geq 1}$. On désigne par h_∞ l'extension auto-adjointe unique du l'opérateur $(-i\nabla - \mathbf{a})^2 + V$ qui est défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En raison de la présence du champ magnétique, la nature du spectre de h_∞ n'est pas connue en général. La seule chose que nous savons est que le spectre est purement essentiel. On désigne par $E_0 := \inf \sigma(h_\infty)$. En raison du principe min-max, on a $E_0 \leq \lambda_1$ pour chaque L > 1.

Le semi-groupe $e^{-\beta h_L}$ généré par h_L appartient à la classe de trace, i.e. $\sum_{j\geq 1} e^{-\beta\lambda_j} < \infty$. Alors nous pouvons considérer la pression et la densité comme dans (3.9) et (3.10), mais avec $|\Lambda_L|$ au lieu de L^3 .

La densité peut être exprimée comme:

$$\rho_L(\beta, z) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{j \ge 1} \frac{z e^{-\beta\lambda_j}}{1 - z e^{-\beta\lambda_j}}.$$
(3.33)

On sait que dans nos conditions la limite thermodynamique $(L \to \infty)$ de la pression et de la densité existe. Nous sommes maintenant intéressés au comportement de $\rho_{\infty}(\beta, z) := \lim_{L\to\infty} \rho_L(\beta, z)$ près de la valeur critique $z_c = e^{\beta E_0}, \beta > 0$.

Soit $P_I(h_L)$ le projecteur spectral de l'opérateur h_L pour un ensemble borélien $I \subset \mathbb{R}$. On désigne par $N_L(\lambda) := |\Lambda_L|^{-1} \text{Tr} \{P_{(-\infty,\lambda)}(h_L)\}$ la fonction de comptage des valeurs propres de h_L (le nombre de fonctions propres de h_L pour des valeurs propres inférieures à λ):

$$\rho_L(\beta, z) = -\int_{E_0}^{\infty} \left[\partial_\lambda \frac{z e^{\beta\lambda}}{1 - z e^{\beta\lambda}} \right] \frac{N_L(\lambda)}{|\Lambda_L|} d\lambda.$$
(3.34)

Rappelons-nous que la densité intégrée des états pour h_{∞} , notée $n_{\infty}(\lambda)$, est définie comme une limite faible:

$$n_{\infty}(\lambda) = \lim_{L \to \infty} \frac{N_L(\lambda)}{|\Lambda_L|}$$
(3.35)

sur l'espace des fonctions continues $C_0([E_0, \infty))$, voir e.g. [27, 30].

Si nous employons (3.34) et (3.35), alors pour $z < z_c$ on peut écrire

$$\rho_{\infty}(\beta, z) = -\int_{E_0}^{\infty} \left[\partial_{\lambda} \frac{z \ e^{-\beta\lambda}}{1 - z \ e^{-\beta\lambda}} \right] n_{\infty}(\lambda) d\lambda.$$
(3.36)

Nous voyons facilement de (3.36) que $\rho_{\infty}(\beta, z)$, augmente avec μ et diminue avec β . D'ailleurs, $\rho_{\infty}(\beta, \cdot)$ a un prolongement analytique au domaine $\mathbb{C} \setminus [z_c, \infty)$.

Definition 3.4. Un gaz homogène de Bose manifeste la condensation de Bose-Einstein (BEC) si pour chaque $\beta > 0$ il admet une densité critique finie $\rho_c(\beta)$ définie de la façon suivante:

$$\rho_c(\beta) := \lim_{\mu \nearrow E_0} \rho_\infty(\beta, z = e^{\beta\mu}) < \infty.$$
(3.37)

La température critique inverse $\beta_c(\rho)$ à une densité ρ donnée, est définie comme la solution de l'équation $\rho_c(\beta_c(\rho)) = \rho$.

Pour le gaz libre, avec $\omega = 0$ et V = 0, la densité intégrée des états est connue explicitement $n_{\infty}(\lambda) = [(2\sqrt{\pi})^d \Gamma(1 + d/2)]^{-1} \lambda^{d/2}$. Alors, (3.36) implique $\rho_c(\beta) < \infty$ pour $d \ge 3$. Ceci justifie le BEC du gaz parfait pour ces dimensions.

D'autre part, nous savons de [3] que pour d = 3 et $\omega \neq 0$, V = 0, la condensation n'existe pas (i.e. $\rho_c(\beta) = \infty$). Nous verrons que ceci est lié au fait que

$$n_{\infty}(\lambda) = B_{\omega,d} \cdot (\lambda - E_0(\omega))^{d/2 - 1} + o((\lambda - E_0(\omega))^{d/2 - 1})$$
(3.38)

pour $\lambda \searrow E_0(\omega)$. En conclusion, l'intégrale (3.36) diverge pour $z = z_c$, si d = 3.

Dans notre papier, on montre qu'en ajoutant un certain potentiel périodique extérieur, nous pouvons reconstituer le BEC dans notre système, même avec le champ magnétique. En particulier, nous prouvons le théorème principal suivant:

Théorème 3.5. On considère un gaz de Bose parfait tridimensionnel, dans un champ magnétique homogène, où l'opérateur Schrödinger pour une particule est donné par $h_{0,L} = (-i\nabla - \mathbf{a})^2$ dans $L^2(\Lambda_L)$ avec conditions de Dirichlet au bord. Ici $\mathbf{a} = \omega \mathbf{a}_0$, où $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}) := 1/2(-x_2, x_1, 0)$, et $\omega > 0$. On suppose que V est \mathbb{Z}^3 -périodique et continu, et on définit l'opérateur $h_L = h_{0,L} + V_L$ dans $L^2(\Lambda_L)$. (i). Si $\omega > 0$ est arbitraire, et V est indépendant de l'une ou l'autre des variables x_1 et x_2 alors le BEC est absent.

(ii). Si maintenant que $\omega = 2\pi$, et V a une dépendance non triviale des deux variables x_1 and x_2 , il existe alors une classe assez grande de tels potentiels, pour lesquels le système perturbé décrit par h_L manifeste le BEC.

(iii). Le résultat précédent (ii) demeure vrai si nous avons une interaction de champ moyen entre les particules.

La preuve du Théorème 3.5 est basée sur l'observation suivante. Parce que nous avons $h_L \ge h_{0,L} + \min(V)$, le principe de min-max implique que la *n*-ième valeur propre de h_L est plus grande ou égale à la *n*-ième valeur propre de $h_{0,L}$ décalée avec min(V). Alors avec une notation évidente nous avons:

$$N_L(\lambda) \le N_{0,L}(\lambda - \min(V));$$

ainsi en employant les formules (3.35) et (3.38) nous obtenons une limite supérieure du type ~ $\lambda^{d/2-1}$ pour $n_{\infty}(\lambda)$ à l'infini. Par conséquent, le seul facteur qui peut décider si la limite figurant dans (3.37) est finie ou pas est le comportement de $n_{\infty}(\lambda)$ près du fond E_0 du spectre $\sigma(h_{\infty})$. En effet, on peut facilement voir qu'une condition suffisante pour avoir une densité critique finie est l'estimation:

$$n_{\infty}(\lambda) \le \operatorname{const} \cdot (\lambda - E_0)^{1+\alpha}, \quad \lambda \in (E_0, E_0 + \epsilon)$$
 (3.39)

pour $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$ quelquonque. Au contraire, une condition suffisante pour avoir une densité critique infinie (ou une température critique nule) est l'estimation:

$$n_{\infty}(\lambda) \ge \operatorname{const} \cdot (\lambda - E_0), \quad \lambda \in (E_0, E_0 + \epsilon)$$
 (3.40)

pour un $\epsilon > 0$.

Plus généralement, une condition nécessaire et suffisante pour avoir une densité critique finie pour chaque $\beta > 0$ est l'estimation suivante:

$$\int_{E_0}^{E_0+1} \frac{n_\infty(\lambda)}{(\lambda - E_0)^2} d\lambda < \infty.$$
(3.41)

Question 3.6. Le fait que $\omega = 2\pi$ dans le Théorème 3.5 (ii) est crucial pour notre preuve. On le lie à une condition de rationalité qui nous permet de décomposer l'opérateur dans une intégrale directe. Mais naturellement, $n_{\infty}(\lambda)$ peut être définie pour toutes les valeurs de ω , et nous pouvons encore demander si (3.41) est vraie ou pas. Par conséquent, un problème ouvert intéressant est d'étudier la stabilité de BEC quand ω est un nombre non négatif arbitraire et V est donné par la construction du Théorème 3.5 (ii). Ce que nous savons déjà est que BER existe pour $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$. Pour ω entre ces valeurs on peut s'attendre au scénario suivant.

Quand ω est positif et petit, le BEC sera détruit. En effet, si ω est petit, alors la branche inférieure du spectre pourrait être traitée dans l'approximation de la masse effective. Alors la présence d'un champ magnétique constant détruit le condensat. L'analyse dans un voisinage de $\omega = 2\pi$ est plus délicate. Notez que les arguments rigoureux en faveur de ce scénario semblent être plutôt non triviaux.

4 Phénomènes de transport quantique dans des systèmes méso et macroscopiques

4.1 Transport quantique dans des systèmes mésoscopiques

Les systèmes mésoscopiques ont été intensivement étudiés dans les deux dernières décennies, d'un point de vue théorique et expérimental. Beaucoup d'effort a été consacré à la compréhension des phénomènes de transport par des anneaux, des fils, ou des points quantiques, voir e.g. [4, 28, 39, 40].

Ces nano-dispositifs montrent plusieurs effets non triviaux, par exemple oscillations de conductibilité d'Aharonov-Bohm, et l'effet de Hall quantique. En conséquence, diverses théories ont été développées afin de les expliquer. Parmi de telles théories, l'approche de diffusion au problème de transport lancée par Landauer [35] et accomplie par Büttiker [23], est peut-être la plus fréquemment utilisée dans la littérature de physique.

L'idée fondamentale derrière le formalisme de Landauer-Büttiker (LB) est que le transport de charge par un système fini relié à plusieurs fils est un phénomène de diffusion. La conductibilité G d'un système avec deux fils est liée à sa transmittance \mathcal{T} (qui reste toujours à calculer à partir de la matrice S) par la formule de Landauer à la température zéro,

$$G = \frac{e^2}{h} \mathcal{T}.$$
(4.1)

Comme a été montré par Büttiker, cette formule admet une généralisation à une géométrie avec plusieurs fils, et également au cas quand un champ magnétique est présent. En particulier, un système avec quatre fils est la manière commune de mettre dans l'évidence la quantification de la résistance de Hall dans les champs magnétiques forts.

Alternativement, la conductibilité G peut être dérivée de la théorie de réponse linéaire. Il est alors normal de se poser la question: la formule de Landauer peut-elle être dérivée directement du formalisme de Kubo. Ce problème a été adressé dans une série de papiers dans les années '80. Tous ces papiers ont employé la formule de Kubo comme donné pour les échantillons macroscopiques. Plus tard, Baranger et Stone [12] ont dérivé une formule de Kubo adaptée aux systèmes mésoscopiques avec des fils. Ils ont également présenté une justification formelle de l'équivalence entre la théorie de la réponse linéaire, et l'approche de Landauer-Büttiker.

Le but principal de notre travail est de fournir une dérivation rigoureuse de cette équivalence, suivant leurs idées. Deuxièmement, nous employons le for-

malisme pour décrire le transport résonnant par un échantillon mésoscopique faiblement couplé aux fils.

Nous décrivons ici les résultats qui sont apparus dans [CJM 1,2].

4.1.1 La formule de Landauer-Büttiker

Nous commençons par présenter les notations et les conditions. Le modèle utilisé ici décrit un échantillon fini couplé à un nombre fini de fils. Les fils peuvent être finis ou semi-infinis. Nous employons un modèle discret, i.e. l'approximation des liaisons fortes. L'échantillon est modelé par un ensemble fini $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$. Chaque fil est modelé par $\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots, N\} \subseteq \mathbb{N}$. Le cas $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ $(N = +\infty)$ est pour le fil semi-infini. Nous supposons que nous avons $M \geq 2$ fils.

L'espace de Hilbert pour une particule est

$$\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma) \oplus \underbrace{\ell^2(\mathcal{N}) \oplus \cdots \oplus \ell^2(\mathcal{N})}_{M \text{ copies}}.$$
(4.2)

Le Hamiltonien est noté H. C'est la somme des composants suivants. Pour l'échantillon nous pouvons prendre n'importe quel opérateur auto-adjoint H^S sur $\ell^2(\Gamma)$. En chaque fil nous prenons le Laplacian discret avec conditions de Dirichlet au bord.

Les fils sont numérotés avec $\alpha \in \{1, 2, \dots, M\}$. Alors:

$$H^{L} = \sum_{\alpha=1}^{M} H^{L}_{\alpha}, \quad H^{L}_{\alpha} = \sum_{n_{\alpha} \in \mathcal{N}} t_{L}(|n_{\alpha}\rangle\langle n_{\alpha} + 1| + |n_{\alpha}\rangle\langle n_{\alpha} - 1|).$$
(4.3)

Les fonctions dans $\ell^2(\mathcal{N})$ sont par convention prolongée pour être zéro à -1 et N+1.

L'interaction entre les fils et l'échantillon est décrite à l'aide d'un opérateur de couplage

$$H^{T} = H^{LS} + H^{SL}, \text{ where } H^{LS} = \tau \sum_{\alpha=1}^{M} |0_{\alpha}\rangle \langle \mathcal{S}^{\alpha}|, \qquad (4.4)$$

où H^{SL} est l'adjoint du H^{LS} . Ici $|0_{\alpha}\rangle$ désigne le premier point sur le fil α , et $|S^{\alpha}\rangle$ est le point de contact avec l'échantillon, et qui appartient à lui.

Le paramètre τ est la constante de couplage. La constante est arbitraire dans cette section, mais sera prise petite dans la prochaine.

L'opérateur complet est:

$$H = H^S + H^L + H^T \quad \text{sur } \mathcal{H}. \tag{4.5}$$

D'abord nous considérons le transport électronique par le système. Au début les fils sont finis, avec la longueur N, où N est arbitraire. Nous travaillons exclusivement dans l'ensemble grand-canonique. Ainsi notre système est en contact avec un réservoir d'énergie et de particules. Nous étudions la réponse linéaire d'un système de fermions libres à la température T et avec le potentiel chimique μ . Le système est soumis à une perturbation adiabatique, définie comme suit.

Soit χ_{η} une fonction d'allumage lisse, i.e. $0 \leq \chi_{\eta}(t) \leq 2, \chi_{\eta}(t) = e^{\eta t}$ pour $t \leq 0$, et $\chi_{\eta}(t) = 1$ pour t > 1. La perturbation dépendant du temps est alors donnée par

$$V(N,t) = \chi_{\eta}(t) \sum_{\alpha=1}^{M} V_{\alpha} I_{\alpha}(N).$$

Ici $I_{\alpha}(N) = \sum_{n_{\alpha}=0}^{N} |n_{\alpha}\rangle \langle n_{\alpha}|$ est l'opérateur identité sur $\ell^{2}(\mathcal{N})$. Cette perturbation modélise l'application adiabatique d'une tension constante V_{α} sur le fil α , qui produira un transfert de charge entre les fils par l'intermédiaire de l'échantillon.

Nous sommes intéressés à dériver la réponse du système dûe à la perturbation. Nous omettons les détails et énonçons le résultat. Le courant au temps t = 0 dans le fil α est donné par:

$$\mathcal{I}_{\alpha}(0) = \sum_{\beta=1}^{M} g_{\alpha\beta}(T,\mu,\eta,N) V_{\beta} + \mathcal{O}(V^2).$$
(4.6)

Ici $g_{\alpha\beta}(T,\mu,\eta,N)$ sont les coefficients de conductibilité [28]. Il est clair de la formule ci-dessus que nous travaillons dans le régime de la réponse linéaire.

Ensuite nous prenons la limite $N \to \infty$, suivie de la limite $\eta \to 0$. Les limites doivent être prises dans cet ordre, puisque l'erreur est en fait d'ordre $\mathcal{O}(V^2/\eta^2)$.

La prochaine étape est d'étudier la transmittance, qui est obtenue à partir de la théorie de la diffusion, appliquée à la paire d'opérateurs (K, H_0) , où $H_0 = H^L$ (pour $N = +\infty$) et $K = H_0 + H^S + H^T$. Formulé correctement, ceci est fait dans le cadre de théorie de la diffusion à deux espaces, voir [70]. Puisque la perturbation $H^S + H^T$ est de rang fini, et nous savons tout au sujet de H_0 , la théorie de la diffusion stationnaire nous donne une formule explicite pour la matrice de diffusion, qui est une matrice de type $M \times M$, selon le paramètre spectral $\lambda = 2t_L \cos(k)$ de H_0 . L'opérateur T est donné par la matrice $t_{\alpha\beta}(\lambda)$, et la transmittance est:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}(\lambda) = |t_{\alpha\beta}(\lambda)|^2. \tag{4.7}$$

Il découle des formules explicites que $\mathcal{T}_{\alpha\beta}(\lambda)$ est réelle analytique sur $(-2t_l, 2t_l)$, et nulle en dehors de cet intervalle.

Avec ces préparations nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 4.1. On considère $\alpha \neq \beta$, T > 0, $\mu \in (-2t_L, 2t_L)$, et $\eta > 0$. On suppose que le spectre ponctuel de K (pour $N = +\infty$) est disjoint de $\{-2t_L, 2t_L\}$. Si nous prenons d'abord la limite $N \to \infty$, et puis $\eta \to 0$, nous avons:

$$g_{\alpha,\beta}(T,\mu) = \lim_{\eta \to 0} \left[\lim_{N \to \infty} g_{\alpha,\beta}(T,\mu,\eta,N) \right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-2t_L}^{2t_L} \frac{\partial f_{\mathrm{F-D}}(\lambda)}{\partial \lambda} \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\lambda) d\lambda.$$
(4.8)

Ici $f_{\rm F-D}(\lambda) = 1/(e^{(\lambda-\mu)/T}+1)$ désigne la fonction de Fermi-Dirac. Si nous prenons finalement la limite $T \to 0$, nous obtenons la formule de Landauer

$$g_{\alpha,\beta}(0_+,\mu) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\mu).$$
(4.9)

La preuve de ce résultat principal est tout à fait longue et technique. On doit étudier les deux côtés de l'égalité ci-dessus. Obtenir la transmittance est la partie "facile", en utilisant la formule de Feshbach. Mais l'étude de la conductibilité est une longue chaine des arguments, de même type que la preuve du rapport d'égalité dans le théorème. Nous nous référons à [CJM 1, 2] pour d'autres détails.

4.1.2 Transport résonant dans un point quantique

Dans la section précédente nous avons permis à la constante de couplage τ (voir (4.4) d'être arbitraire. La seule supposition était que l'ensemble $\{-2t_L, 2t_L\}$ n'était pas dans le spectre ponctuel de K. Ici nous considérons le cas $\tau \to 0$. Dans ce cas-ci nous supposerons que le Hamiltonien de l'échantillon n'a pas les valeurs propres $\{-2t_L, 2t_L\}$. Il découle alors d'un argument de perturbation, en utilisant la formule de Feshbach, que le même est vrai pour K, si la constante τ est suffisamment petite.

Puisque H^S est un opérateur sur un espace fini dimensionnel $\ell^2(\Gamma)$, il a un spectre purement discret. Nous énumérons les valeurs propres dans l'intervalle $(-2t_L, 2t_L)$ comme:

$$\sigma(H^S) \cap (-2t_L, 2t_L) = \{E_1, \dots, E_J\}.$$

Soit $\beta \neq \gamma$ deux fils différents. La conductibilité entre ces deux fils est maintenant notée par $\mathcal{T}_{\beta,\gamma}(\lambda,\tau)$, où nous montrons la dépendance explicite en τ , voir (4.7).

Théorème 4.2. On suppose que les valeurs propres $\{E_1, \ldots, E_J\}$ ne sont pas dégénérées, et on note ϕ_1, \ldots, ϕ_J les fonctions propres normalisées correspondantes. Nous avons alors les résultats suivants:

(i) Pour chaque $\lambda \in (-2t_L, 2t_L) \setminus \{E_1, \dots, E_J\}$ on a:

$$\lim_{\tau \to 0} \mathcal{T}_{\beta,\gamma}(\lambda,\tau) = 0.$$
(4.10)

(ii) Soit $\lambda = E_j$. Si $\langle S^{\beta}, \phi_j \rangle = 0$ ou $\langle S^{\gamma}, \phi_j \rangle = 0$, alors

$$\lim_{\tau \to 0} \mathcal{T}_{\beta,\gamma}(E_j,\tau) = 0.$$
(4.11)

(iii) Soit $\lambda = E_j$. Si $\langle S^{\beta}, \phi_j \rangle \cdot \langle S^{\gamma}, \phi_j \rangle \neq 0$, alors il existe une constante positive $C(E_j)$ telle que

$$\lim_{\tau \to 0} \mathcal{T}_{\beta,\gamma}(E_j,\tau) = C(E_j) \left| \frac{\langle \mathcal{S}^{\beta}, \phi_j \rangle \cdot \langle \mathcal{S}^{\gamma}, \phi_j \rangle}{\sum_{\alpha=1}^M |\langle \mathcal{S}^{\alpha}, \phi_j \rangle|^2} \right|^2.$$
(4.12)

Ce résultat peut être interprété comme suit. Cas (i): Si l'énergie de l'électron incident n'est pas près des valeurs propres de H^S , elle ne contribuera pas au courant. Cas (ii): Si l'énergie incident est près d'une certaine valeur propre de H^S , mais la fonction propre n'est pas simultanément localisée près des points de contact S^{β} et S^{γ} , il n'y a aucun courant encore. Cas (iii): Afin d'avoir un certain courant par le système, il est nécessaire d'avoir des états de bord, qui couplent plusieurs fils.

4.2 La rotation de Faraday

Contrairement au cas du champ magnétique zéro, l'analyse des propriétés des électrons dans des potentiels périodiques ou aléatoires soumis aux champs magnétiques extérieurs est un problème très délicat. La difficulté est située dans la nature singulière de l'interaction magnétique: en raison d'une augmentation linéaire du potentiel magnétique vecteur, la théorie naive de perturbation cesse de fonctionner même aux champs arbitrairement petits.

À notre meilleure connaissance, seulement des systèmes périodiques ont été étudiés en liaison avec la rotation de Faraday pour les systèmes étendus. Le premier calcul complet dans le cadre de la mécanique quantique a été fait par Laura M. Roth [59] (pour une liste des tentatives plus anciennes nous dirigeons le lecteur vers cet article). L'expérience physique consiste à envoyer un rayon monochromatique de lumière, parallèle à la direction 0z et linéairement polarisé dans le plan x0z. Quand la lumière croise le matériel, le plan de polarisation peut changer; en fait, là existe une relation linéaire entre l'angle θ de la rotation du plan de la polarisation par unité de longueur, et la composante transversale du tenseur de conductivité σ_{xy} (voir la formule (1) dans [59]). Le matériel est choisi de telle manière que quand le champ magnétique est nul, cette composante transversale disparaît. Quand le champ magnétique B n'est pas nul, et pour des champs faibles, on développe le tenseur de conductivité au premier ordre dans B et obtient une formule pour la constante de Verdet, proportionnelle à $\frac{d\sigma_{xy}}{dB}(0)$.

Par conséquent l'objet central de notre étude est $\sigma_{xy}(b)$, qui dépend entre autres de la température, de la densité du matériel, et de la fréquence de la lumière. En utilisant une représentation modifiée de Bloch, Roth pouvait obtenir une formule pour $\frac{d\sigma_{xy}}{db}(0)$, et étudier comment cette contribution du premier ordre se comporte en fonction de la fréquence, pour des métaux et également pour des semi-conducteurs.

Notre méthode emploie la théorie de perturbation magnétique, et elle est beaucoup plus générale. Nous re-obtenons les résultats de Roth, et beaucoup plus. Nous expliquons maintenant en détail certains de nos résultats les plus importants.

4.2.1 La réponse linéaire et la limite thérmodynamique

Nous commençons par le cadre mathématique. Nous travaillons qu'avec des électrons indépendants, mais nous prenons en compte le spin et les corrections relativistes du premier ordre.

Le cristal est modélisé avec $\Lambda_L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}/L \in \Lambda_1\}$, comme c'est expliqué dans (3.30). Soit $D_L = H^2(\Lambda_L) \cap H^1_0(\Lambda_L)$. Nous considérons des potentiels extérieurs périodiques par rapport à \mathbb{Z}^3 . Le potentiel vecteur magnétique est de la même forme que dans (3.31). L'opérateur pour une particule est:

$$H_L(B) = \frac{1}{2m} \mathbf{P}(B)^2 + V + g\mu_b B\sigma_3, \qquad (4.13)$$

avec conditions de Dirichlet à la frontière. Il est auto-adjoint sur le domaine $D_L \oplus D_L$, et (b = -eB/c)

$$\mathbf{P}(B) = -i\nabla + \frac{1}{2mc^2}\mathbf{s} \wedge (\nabla V) - b\mathbf{a} = \mathbf{P}(0) - b\mathbf{a}$$
(4.14)

Soit maintenant $D_{\infty} = \overline{[(-i\nabla - b\mathbf{a})^2 + 1]C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)}$. Alors l'opérateur

$$H_{\infty}(B) = \frac{1}{2m} \mathbf{P}(B)^2 + V + g\mu_b B\sigma_3 \tag{4.15}$$

est auto-adjoint sur $D_{\infty} \oplus D_{\infty}$.

Nous avons donné une dérivation du tenseur de conductivité dans notre papier, à partir des premiers principes de mécanique statistique quantique, et dans la théorie de la réponse linéaire. Nous l'avons faite parce que nous avons voulu prouver qu'elle a coïncidé avec diverses formules utilisées avant. Bien que dans la physique établir la formule de Kubo soit considéré un problème facile, d'un point de vue mathématique il demeure toujours difficile (voir e.g. [15]).

À la fin nous obtenons (on emploie encore $f_{F-D}(z) = \frac{1}{e^{(z-\mu)/T}+1}$)

$$\sigma_L(B,\omega,\mu,T) = -\frac{e^2}{2\pi m^2 \omega |\Lambda_L|}$$

$$\cdot \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_\omega} f_{\mathrm{F-D}}(z) \left\{ P_1(B) (H_L(B) - z)^{-1} P_2(B) (H_L(B) - z - \omega)^{-1} + z \to z - \omega \right\} dz,$$

$$(4.16)$$

où ω est la fréquence de la lumière, et Γ_{ω} est un contour d'intégration infiniment long, choisi d'une manière spéciale (voir [CNP]).

Le premier résultat est la preuve de l'existence d'une limite quand L converge vers infini.

Théorème 4.3. On suppose pour la simplicité que Ω , la cellule élémentaire de V, est le cube unité de \mathbb{R}^3 . La composante transversale ci-dessus définie à partir du tenseur de conductivité admet la limite thermodynamique:

i. L'opérateur suivant qui est défini par une intégrale de Riemann convergente dans la norme de $B(L^2 \oplus L^2)$:

$$F_L := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\omega} f_{\mathrm{F-D}}(z) \{ P_1(B) (H_L(B) - z)^{-1} P_2(B) (H_L(B) - z - \omega)^{-1} + z \to z - \omega \} dz,$$
(4.17)

est en fait un opérateur de classe trace, et $\sigma_L(B, \omega, \mu, T) = \frac{e^2}{m^2 \omega |\Lambda_L|} \operatorname{Tr}(F_L)$. ii. On considère l'opérateur F_{∞} defini par la même intégrale mais avec

ii. On considère l'opérateur F_{∞} defini par la même intégrale mais avec $H_{\infty}(B)$ au lieu de $H_L(B)$. Alors F_{∞} est un opérateur intégral, avec un noyau $\mathcal{A}_{s,s'}^{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{x'})$ qui est conjointement continu dans les deux variables. D'ailleurs, la fonction définie par $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \to s_B(\mathbf{x}) := \sum_{s=1}^2 \mathcal{A}_{s,s}^{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}$ est continue et périodique par rapport à \mathbb{Z}^3 .

iii. La limite thermodynamique existe:

$$\sigma_{\infty}(B,\omega,\mu,T) := \lim_{L \to \infty} \sigma_L(B,\omega,\mu,T) = \frac{e^2}{m^2 \omega |\Omega|} \int_{\Omega} s_B(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$
(4.18)

4.2.2 La formule de Widom et Streda

Nous essayons maintenant d'être plus précis, et étudions quelles sont les choses pratiques que nous pouvons faire avec la formule (4.18). On suppose maintenant que $[d_1, d_2] \subset \rho(H_{\infty}(B))$ pour chaque $|B| \leq B_0$. On définit la densité grand-canonique par $n(T, \mu, B) := \int_{\Omega} [f_{F-D}(H_{\infty}(B))](\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, et on résout l'équation $\rho = n(T, \mu, B)$, pour obtenir μ en fonction de ρ, T et B.

Si $\mu(T, \rho, B) \in [d_1, d_2]$ pour chaque $T \leq T_0$ et $|B| \leq B_0$, alors nous avons un semi-conducteur qui est stable par rapport à B. Si $\mu(T, \rho, B)$ est dans le spectre, alors nous avons un métal.

Si nous travaillons maintenant dans des "conditions canoniques", on définit

$$\sigma_c(B,\omega,T,\rho) := \sigma_\infty(B,\omega,T,\mu(T,\rho,B)).$$

Cette formule est le point de départ d'un nombre considérable de questions. Par exemple:

- 1. La rotation de Faraday, l'effet Cotton-Mouton etc, peuvent être formulés comme suit: écrire une formule contenant seulement des fonctions et des énergies de Bloch pour les coefficients $(\partial_B^k \sigma_c)(0, \omega, T, \rho), k \geq 1;$
- 2. L'effet Hall: définir $\nu = \rho/(eB)$ (le facteur d'occupation) et étudier $\sigma_h(\nu, \omega, \rho) = \sigma_c(\rho/\nu, \omega, 0, \rho).$

Nous formulerons maintenant un résultat qui établit le rapport formel entre l'effet de Hall quantique, et la rotation de Faraday. On suppose que $\mu \in [d_1, d_2]$. Soit $R_B(\zeta) = (H_{\infty}(B) - \zeta)^{-1}$. Alors si T tend vers zéro, on a (pour d'autres details, voir la formule (4.12) en [CNP]):

$$\sigma_{\infty}(B,\omega,T=0,\mu) = -\frac{e^2}{2\pi m^2 \omega} \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega} \left[\int_{\Gamma} P_1(B) R_B(z-\omega/2) P_2(B) R_B(z+\omega/2) \right]_{s,s} (\mathbf{x},\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

où $|\omega| < \omega_0$ et Γ est un contour qui contient "les états occupés" au-dessous du μ .

On définit la projection de Fermi

$$\Pi^B = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} R_B(z) dz.$$

Nous devons faire une distinction entre le coefficient de champ magnétique qui multiplie \mathbf{A} , et celui qui multiplie le spin. Nous faisons cela en écrivant

" $H_L(B_1, B_2) = \frac{1}{2m} \mathbf{P}(B_2)^2 + V + g\mu_b B_1 \sigma_3$ ". Alors on a la formule de Widom et Streda:

Théorème 4.4. Si nous prenons d'abord la limite $T \searrow 0$, et ensuite nous prenons $\omega \rightarrow 0$, nous obtenons:

$$\lim_{\omega \to 0} \lim_{T \to 0} \sigma_{\infty}(B, \omega, T, \mu) = ec \frac{\partial}{\partial B_2} \frac{1}{|\Omega|} \sum_{s=1}^{2} \int_{\Omega} \prod_{s,s}^{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \Big|_{B_1 = B_2 = B}$$
$$= ec \left[\partial_{B_2} n(T = 0, \mu, B) \right]_{B_1 = B_2 = B}, \quad (4.19)$$

uniformément pour μ dans l'intervalle $[d_1, d_2]$.

La preuve n'est pas du tout facile; elle emploie fortement la théorie de perturbation magnétique.

4.2.3 Le cas des électrons libres

Si V = 0 il suit que le tenseur de conductivité peut être calculé explicitement pour tous les valeurs de B et ω . La formule ne dépend pas de la dimension deux ou trois. Plus précisément, on obtient:

$$\sigma_{\infty} = \frac{e^3 n}{m^2 c} \frac{B}{\omega^2 - \frac{B^2 e^2}{m^2 c^2}},\tag{4.20}$$

où $n = n(T, \mu, B)$ est la densité grand-canonique. Cette formule est bien connue dans la physique classique; elle est attribué à Drude. Mais nous ne nous rendons pas compte d'un calcul purement quantique connu. Il est possible d'obtenir la formule en employant la forme explicite des valeurs propres et des projections spectrales pour l'Hamiltonien de Landau, mais nous l'avons obtenu employant seulement des identités impliquant des commutateurs.

4.2.4 La constante de Verdet

Quand $V \neq 0$, il n'est plus possible d'obtenir une formule fermée pour σ_{∞} . Puisque dans la plupart des applications physiques le champ magnétique extérieur peut être considéré faible, un développement en *B* jusqu'au premier ou deuxième ordre serait suffisant.

Notez que la rotation de Faraday est donnée par la formule $\theta = \frac{2\pi}{nc} \sigma_{\infty}$, où *n* est la densité du matériel. Alors la constante de Verdet est donnée par la formule

$$\mathcal{V} := \frac{2\pi}{nc} (\partial_B \sigma_\infty) (B = 0). \tag{4.21}$$

Notre tâche est d'écrire une formule pour \mathcal{V} contenant seulement des fonctions et des énergies de Bloch. Si nous employons les formules (4.18) et (4.21), et si on désigne par $K_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; z)$ le noyau intégral de l' opérateur $(H_{\infty}(B) - z)^{-1}$ on a:

$$\mathcal{V} = -\frac{e^2}{ncm^2\omega}\partial_B \int_{\Omega} d\mathbf{x} \left\{ \operatorname{tr} \int_{\Gamma_{\omega}} dz f_{\mathrm{F-D}}(z) \right.$$

$$\left. \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{u} \left\{ [(P_{\mathbf{x},1}(0) - bA_1(\mathbf{x} - \mathbf{u}))K_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; z)] \right.$$

$$\left. \cdot [(P_{\mathbf{u},2}(0) - bA_2(\mathbf{u} - \mathbf{x}'))K_{\infty}(\mathbf{u}, \mathbf{x}'; z + \omega)] \right.$$

$$\left. + \left[(P_{\mathbf{x},1}(0) - bA_1(\mathbf{x} - \mathbf{u}))K_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; z - \omega)] \right.$$

$$\left. \cdot \left[(P_{\mathbf{u},2}(0) - bA_2(\mathbf{u} - \mathbf{x}'))K_L(\mathbf{u}, \mathbf{x}'; z)] \right\} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}', B=0}, \quad b = -\frac{e}{c}B.$$

$$\left. \left. \left. \left. \left. \left. \left(P_{\mathbf{u},2}(0) - bA_2(\mathbf{u} - \mathbf{x}') \right) K_L(\mathbf{u}, \mathbf{x}'; z) \right] \right\} \right] \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}', B=0}, \quad b = -\frac{e}{c}B.$$

Nous avons maintenant le problème du développement du noyau $K_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \zeta)$ en *b*. On utilise pour ça la théorie de perturbation magnétique [52]. Si $G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)$ est le noyau de l'opérateur périodique, sans champ magnétique, on obtient:

$$K_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z) = G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)$$

$$+ \frac{b}{m} \int_{\mathbb{R}^{3}} G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; z) \left[\mathbf{P}_{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{a}_{0}(\mathbf{u} - \mathbf{y}) G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{y}; z) \right] d\mathbf{u}$$

$$+ b \frac{gc\mu_{b}}{e} \int_{\mathbb{R}^{3}} G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; z) \sigma_{3} G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{y}; z) d\mathbf{u} + \mathcal{O}(b^{2})$$

$$= G_{\infty}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z) + b G_{\infty}^{(orbit)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z) + b G_{\infty}^{(spin)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z) + \mathcal{O}(b^{2}).$$

$$(4.23)$$

Une identité très importante est la suivante:

$$\mathbf{a}_{0}(\mathbf{y} - \mathbf{x})(H_{\infty}(B) - z)^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$$

$$-\frac{i}{2m}\mathbf{n}_{3} \wedge [(H_{\infty}(B) - z)^{-1}\mathbf{P}(B)(H_{\infty}(B) - z)^{-1}](\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$
(4.24)

Si nous remplaçons ceci dans la formule (4.22), et on utilise après (4.23), toutes les contributions qui apparaissent seront construites avec des quantités correspondant au cas du champ magnétique nul. Nous pouvons voir qu'une contribution à la constante de Verdet vient de l'orbite, et une autre vient du spin:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{orbite}} + \mathcal{V}_{\text{spin}}.$$
(4.25)

Les formules explicites sont très longues et compliquées, et on donne ici que la contribution du spin. Si $\{u_j(\mathbf{x}, \mathbf{k})\}_{j\geq 1}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{k} \in \Omega^*$, sont les fonctions de Bloch, et $\{\lambda_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ sont les énergies de Bloch correspondantes, et avec les notations:

$$\hat{s}_{ij}(\mathbf{k}) := \int_{\Omega} \langle u_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \sigma_3 u_j(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \rangle d\mathbf{x},
\hat{\pi}_{nm}(j, \mathbf{k}) := -i \int_{\Omega} \langle u_n(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \partial_{x_j} u_m(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \rangle d\mathbf{x},$$
(4.26)

on peut écrire:

$$\mathcal{V}_{spin} = \frac{e^3 g \mu_b}{(2\pi)^3 n c m^2 \omega} \int_{\Omega^*} d\mathbf{k} \sum_{n_1, n_2, n_3 \ge 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\omega} dz f_{FD}(z) \quad (4.27) \\
\left\{ \frac{\hat{\pi}_{n_1 n_2}(1, \mathbf{k}) \hat{s}_{n_2 n_3}(\mathbf{k}) \hat{\pi}_{n_3 n_1}(2, \mathbf{k})}{(\lambda_{n_2}(\mathbf{k}) - z)(\lambda_{n_3}(\mathbf{k}) - z)(\lambda_{n_1}(\mathbf{k}) - z - \omega)} \\
+ \frac{\hat{\pi}_{n_1 n_2}(1, \mathbf{k}) \hat{\pi}_{n_2 n_3}(2, \mathbf{k}) \hat{s}_{n_3 n_1}(\mathbf{k})}{(\lambda_{n_2}(\mathbf{k}) - z)(\lambda_{n_3}(\mathbf{k}) - z - \omega)(\lambda_{n_1}(\mathbf{k}) - z - \omega)} \\
+ \frac{\hat{\pi}_{n_1 n_2}(1, \mathbf{k}) \hat{s}_{n_2 n_3}(\mathbf{k}) \hat{\pi}_{n_3 n_1}(2, \mathbf{k})}{(\lambda_{n_2}(\mathbf{k}) - z + \omega)(\lambda_{n_3}(\mathbf{k}) - z + \omega)(\lambda_{n_1}(\mathbf{k}) - z)} \\
+ \frac{\hat{\pi}_{n_1 n_2}(1, \mathbf{k}) \hat{\pi}_{n_2 n_3}(2, \mathbf{k}) \hat{s}_{n_3 n_1}(\mathbf{k})}{(\lambda_{n_2}(\mathbf{k}) - z + \omega)(\lambda_{n_3}(\mathbf{k}) - z + \omega)(\lambda_{n_1}(\mathbf{k}) - z)} \\
+ \frac{\hat{\pi}_{n_1 n_2}(1, \mathbf{k}) \hat{\pi}_{n_2 n_3}(2, \mathbf{k}) \hat{s}_{n_3 n_1}(\mathbf{k})}{(\lambda_{n_2}(\mathbf{k}) - z + \omega)(\lambda_{n_3}(\mathbf{k}) - z)(\lambda_{n_1}(\mathbf{k}) - z)} \\
\right\}.$$

Pour d'autres détails, voir [CNP].

5 Propriétés spectrales des nanotubes de carbone

Afin de comprendre la théorie de nanotubes de carbone, on doit reconsidérer beaucoup de problèmes classiques dans lesquels les systèmes sont limités aux espaces de configuration de basses dimensions. Les effets induits par ces formes spéciales sont importants. Par exemple, les propriétés optiques et la conductivité électrique dans les nanotubes et les nanofils sont fortement influencées par leur géométrie.

Dans une structure périodique, les bandes des énergies permises et interdites sont caractéristiques pour les électrons quasi-libres. Quand une perturbation extérieure est appliquée, comme la lumière, les électrons peuvent seulement absorber la quantité d'énergie qui leur permet de sauter d'un niveau occupé d'énergie à un niveau libre. Dans le cas particulier d'un semiconducteur, et à de basses températures, les bandes des énergies sont pleines (les bandes de valence) ou vident (les bandes de conduction). Ainsi l'électron doit absorber une quantité d'énergie relativement grande afin de pouvoir sauter à la bande de conduction.

Quand l'interaction entre les électrons est également prise en compte, le problème mathématique de la réponse optique devient très difficile, et il n'y a pas beaucoup de résultats rigoureux dans cette direction.

Nous avons considéré deux, trois, et quatre particules chargées placées sur un cylindre et agissant l'une sur l'autre par un potentiel de Coulomb. Elles définissent des opérateurs effectifs pour excitons/trions/bi-excitons dans des nanotubes de carbone, voir [54], [55], [25], [56]. Nous espérons que nos résultats peuvent également décrire des excitons placés sur des nanofils [1], ou des particules placées dans un champ magnétique fort [22].

5.1 Trois particules sur la ligne

Ici nous discutons seulement les résultats au sujet des trions, obtenus dans l'article [CDR].

On désigne par $x_i, m_i, Z_i e, i = 1, 2, 3$, les positions, les masses et les charges des trois particules. Notre système est décrit formellement par le Hamiltonien:

$$\sum_{i=1}^{3} -\frac{\hbar^2}{2m_i} \partial_{x_i}^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} Z_i Z_j e^2 \delta(x_i - x_j) \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^3)$$

ce qui est défini en tant qu'opérateur lié à la forme quadratique de domaine

 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\hbar^2}{2m_i} \|\partial_{x_i}\psi\|^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} Z_i Z_j e^2 \int_{x_i = x_j} |\psi(\sigma_{i,j})|^2 d\sigma_{i,j}, \quad \psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$$

Ici $\sigma_{i,j}$ désigne un point dans le plan $x_i = x_j$. Nous considérerons les situations suivantes:

$$m_1 = m_2 =: m > 0, \quad m_3 =: M > 0 \quad Z_1 = Z_2 = -1, \quad Z_3 =: Z > 0$$

et nous répondrons à la question pour quelles valeurs des m/M et Z ce système possède-t-il au moins un état lié après la séparation du centre de masse?

Il y a une quantité énorme de littérature sur les particules dans une dimension agissant l'un sur l'autre par des potentiels de delta tout repulsive ou toute attractives, mais peu de papiers traitent le cas mixte. Nous mentionnons le travail de Rosenthal, [57], où il a considéré $M = \infty$. Le but de ce travail est d'effectuer une étude mathématique systématique des résultats de Rosenthal et de les prolonger au cas $M < \infty$. On a montré en [22] et [25] que ces modèles servent d'hamiltoniens effectifs pour des atomes soumis à des champs magnétiques forts, ou pour des quasi-particules dans des nanotubes de carbone. Ils semblent également être appropriés pour les guides d'ondes atomiques, et pour les nanofils (voir [42], [53], [65], [31]).

5.1.1 La séparation du centre de masse

On utilise les coordonnées de Jacobi: $x := x_2 - x_1$, $y := x_3 - (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$, $z := \sum_i m_i x_i / \sum_i m_i$, et on obtient un Hamiltonian qui correspond au mouvement relatif:

$$\widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\partial_x^2 - \frac{2m+M}{4mM}\hbar^2\partial_y^2 + e^2\delta(x) - Ze^2\delta(y-\frac{x}{2}) - Ze^2\delta(y+\frac{x}{2}).$$

Soit $\alpha^2 := (M + 2m)/4M$ et $\nu(\alpha) := \sqrt{1/4 + \alpha^2}$. Soit J le Jacobian du changement de variables linéaire $(x', y') = \{2\nu(\alpha)\hbar^2/(mZe^2)\}(x, \alpha y)$. On définit l'unitaire $(U^{-1}f)(x, y) = \sqrt{J}f(x', y')$. On considère trois vecteurs unité de \mathbb{R}^2 donnés par

$$A_1 := \frac{1}{\nu(\alpha)} \left(\alpha, -\frac{1}{2} \right), \ A_2 := \frac{1}{\nu(\alpha)} \left(-\alpha, -\frac{1}{2} \right), \ A_3 := (0, 1).$$

On définit le vecteur A_i^{\perp} comme A_i tourné de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique. Alors $U\widetilde{H}U^{-1} = {mZ^2e^4}/{{2\hbar^2\nu(\alpha)^2}} H$, où:

$$H := -\frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}\partial_y^2 - \delta(A_1^{\perp}.(x,y)) - \delta(A_2^{\perp}.(x,y)) + \lambda\delta(A_3^{\perp}.(x,y)), \quad \lambda := \frac{\nu(\alpha)}{Z}.$$

On désigne par $\theta_{i,j}$ l'angle entre les vecteurs A_i and A_j .

5.1.2 Réduction par symétrie

Soit A un vector unité dans \mathbb{R}^2 . On définit l'opérateur $\tau_A : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R})$ par $(\tau_A \psi)(s) := \psi(sA)$. Soit $\tau : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \to \bigoplus_{i=1}^3 L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur défini par $\tau := (\tau_{A_1}, \tau_{A_2}, \tau_{A_3})$. Alors on peut récrire l'opérateur H comme $H_0 + \tau^* g \tau$, où $2H_0$ est le Laplacian libre et g est la matrice diagonale avec les éléments différents de zéro égaux avec $(-1, -1, \lambda)$. Le spectre essentiel est $\sigma_{\text{ess}}(H) = [-\frac{1}{2}, \infty)$.

Un résultat standard est contenu dans le lemme suivant:

Lemme 5.1. Soit $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\mathbf{S} := k g^{-1} + \tau R_0(-1)\tau^*$. Alors $E = -k^2 < -\frac{1}{2}$ est une valeur propre discrète de H si est seulement si $\ker(g^{-1} + \tau R_0(E)\tau^*) \neq \{0\}$. En outre, $\operatorname{mult}(E) = \dim(\ker \mathbf{S})$.

L'analyse spectrale est ainsi réduite à l'étude de **S**. Nous appelons **S** le squelette de *H*. Soit maintenant $T_{A,B} := \tau_A R_0(-1)\tau_B^*$, $T_0 := T_{A,A}$, où $\theta_{A,B}$ est l'angle entre les vectors *A* et *B*. Soit $\widehat{T}_{A,B}$ l'image Fourier de $T_{A,B}$. Alors le noyau de $\widehat{T}_{A,B}$ pour $\theta_{A,B} \notin \{0,\pi\}$, est:

$$\widehat{T}_{A,B}(p,q) = \frac{1}{2\pi |\sin(\theta_{A,B})|} \frac{1}{\left(\frac{p^2 - 2\cos(\theta_{A,B})pq + q^2}{2\sin^2(\theta_{A,B})} + 1\right)}.$$
(5.1)

Si $\theta = 0$ on a $\widehat{T}_0(p,q) = \frac{\delta(p-q)}{\sqrt{p^2+2}}$. Dorénavant nous notons T_{A_i,A_j} avec $T_{\theta_{i,j}}$ ou $T_{i,j}$.

Soit $\pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur de parité, i.e. $\{\pi\varphi\}(p) = \varphi(-p)$. On désigne par $\pi_1 := \pi \otimes 1$ et $\pi_2 := 1 \otimes \pi$ les symétries par rapport à Ox et Oy. On a que pour tous $i, j \in \{1, 2\}, [\pi_i, H] = 0$ et $[\pi_i, \pi_j] = 0$. Si on désigne par $\pi_i^{\alpha}, \alpha = +, -$, les projections spectrales associées à π_i sur les fonctions paires /impaires, nous pouvons décomposer l'opérateur H en somme directe:

$$H = \bigoplus_{\alpha \in \{\pm\}, \beta \in \{\pm\}} H^{\alpha, \beta}, \quad H^{\alpha, \beta} := \pi_1^{\alpha} \pi_2^{\beta} H.$$

Nous devons étudier quatre situations différentes, correspondant aux quatre sous-espaces, et chaque opérateur $S^{\alpha,\beta}$ agit dans l'espace $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$S^{\alpha,\beta}$	squelette effective	sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$
++	$k - T_0 - T_{1,2}^+ + 2T_{2,3}^+ (T_0 + k\lambda^{-1})^{-1} T_{2,3}^+$	$\operatorname{Ran} \pi_1^+ \pi_2^+$
-+	$k - T_0 - T_{1,2} + 2T_{2,3}(T_0 + k\lambda^{-1})^{-1}T_{2,3}$	$\operatorname{Ran} \pi_1^+ \pi_2^-$
+-	$k - T_0 + T_{1,2}^+$	$\operatorname{Ran} \pi_1^- \pi_2^-$
	$k - T_0 + T_{1,2}$	$\operatorname{Ran} \pi_1^- \pi_2^+$

5.1.3 Les résultats

Théorème 5.2. (i). Pour chaque Z > 0 et $0 < M/m \le \infty$, H n'a aucun état lié dans le secteur de symétrie $\operatorname{Ran} \pi_2^-$.

(ii). Pour chaque Z > 0 et $1 \le M/m \le \infty$, H n'a aucun état lié dans le secteur de symétrie $\operatorname{Ran} \pi_1^- \pi_2^-$.

(iii). On désigne par $K(k) := T_{1,2}^+ - 2T_{2,3}^+ (T_0 + k\lambda^{-1})^{-1}T_{2,3}^+$, et par $\mathcal{K}(p,q)$ le noyau de $K(2^{-\frac{1}{2}})$. Alors pour chaque $0 < M/m \le \infty$, H a au moins un état lié dans le secteur de symétrie $\operatorname{Ran} \pi_1^+ \pi_2^+$ si Z est tel que $\mathcal{K}(0,0) > 0$.

Il est possible de calculer $\mathcal{K}(0,0)$ explicitement. On peut montrer qu'il existe $Z_c^{ub}(M/m)$ tel que pour chaque Z plus grand que cette valeur, on a $\mathcal{K}(0,0) > 0$. Pour d'autres détails, voir [CDR].

6 La bibliographie

References

- [1] Akiyama H., "One dimensional excitons in GaAs quantum nanowires", J. Phys.: Condens. Matter. **10**, 3095 (1998).
- [2] Angelescu, N., Bundaru, M., and Nenciu, G., "On the Landau diamagnetism", Commun. Math. Phys. 42, 9 (1975).
- [3] Angelescu, N. and Corciovei, A., "On free quantum gases in a homogeneous magnetic field", Rev. Roum. Phys. **20**, 661 (1975).
- [4] Aschbacher, W., Jaksic, V., Pautrat, Y., and Pillet, C-A., Introduction to non-equilibrium quantum statistical mechanics http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=05-207
- [5] Avron, J.E., Elgart, A., Graf, G.M., Sadun, L., and Schnee, K., "Adiabatic charge pumping in open quantum systems", Comm. Pure. App. Math. 57, 528 (2004).
- [6] Avron, J.E., Elgart, A., Graf, G.M., and Sadun, L., "Transport and dissipation in quantum pumps", J. Stat. Phys. 116, 425 (2004).
- [7] Avron, J.E., Elgart, A., Graf, G.M., and Sadun, L., "Geometry, statistics, and asymptotics of quantum pumps", Phys. Rev. B 62, R10618 (2000).
- [8] Avron, J.E., Elgart, A., Graf, G.M., and Sadun, L., "Time-energy coherent states and adiabatic scattering", J. Math. Phys. 43, 3415 (2002).
- [9] Avron, J.E., Elgart, A., Graf, G.M., and Sadun, L., "Optimal quantum pumps", Phys. Rev. Lett. 87, 236601 (2001).
- [10] Avron, J., Herbst, I., and Simon, B., "Schrödinger operators with magnetic fields.I. General interactions.", Duke Math. J. 45, 847 (1978).
- [11] Avron, J. and Simon, B., "Stability of gaps for periodic potentials under variation of a magnetic field", J. Phys. A. 18, 2199 (1985).
- [12] Baranger, H. U. and Stone, A. D., "Electrical linear-response theory in an arbitrary magnetic field: A new Fermi-surface formulation", Phys. Rev. B 40, 8169 (1989).

- [13] Barbaroux, J.M., Combes, J.M., and Hislop P.D., "Localization near band edges for random Schrödinger operators", Helv. Phys. Acta. 70, 16 (1997).
- [14] Berg-Sørensen, K. and Mølmer, K., "Bose-Einstein condensates in spatially periodic potentials", Phys. Rev. A 58, 1480 (1998).
- [15] Bouclet, J-M, Germinet, F., Klein, A., and Schenker, J.H., "Linear response theory for magnetic Schrdinger operators in disordered media", J. Funct. Anal. 226 no.2, 301 (2005).
- [16] Bratelli, O. and Robinson, D.W.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2 (Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, Second Edition, 1997).
- [17] Briet, P., "Bender-Wu formula for the Zeeman effect", J. Math. Phys. 36, 3871 (1995).
- [18] Briet, P., Combes, J. M., and Duclos, P., "Spectral stability under tunneling", Commun. Math. Phys. 126, 133 (1989).
- [19] Broderix, K., Hundertmark, D., and Leschke, H., "Continuity properties of Schrödinger semigroups with magnetic fields", Rev. Math. Phys. 12, no. 2, 181 (2000).
- [20] Brouwer, P.W., "Scattering approach to parametric pumping", Phys. Rev. B 58, R10135 (1998).
- [21] Brown, E., "Bloch electrons in a uniform magnetic field", Phys. Rev. 133: A1038 (1964).
- [22] Brummelhuis R. and Duclos P., "Effective Hamiltonians for atoms in very strong magnetic fields", Few-Body Systems 31, 1 (2002).
- [23] Büttiker, M., "Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors", Phys. Rev. B 38, 9375 (1988).
- [24] Cornean, H.D., "On the essential spectrum of two dimensional periodic magnetic Schrödinger operators", Lett. Math. Phys. 49, 197 (1999).
- [25] Cornean, H.D., Duclos, P., and Pedersen, T.G., "One dimensional models of excitons in carbon nanotubes", Few-Body Systems 34, 155 (2004).

- [26] Cornean, H.D. and Nenciu, G., "On eigenfunction decay for two dimensional magnetic Schrödinger operators", Commun. Math. Phys. 192, 671 (1998).
- [27] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W., and Simon, B., Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry (Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1987).
- [28] Datta, S. *Electronic transport in mesoscopic systems* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995).
- [29] Davies, E.B., Spectral theory of differential operators (Cambridge, Cambridge University Press, 1995).
- [30] Doi, S.I., Iwatsuka, A., and Mine, T., "The uniqueness of the integrated density of states for the Schrödinger operators with magnetic field", Math. Z. 237, 335 (2001).
- [31] Exner, P. and Ichinose, T., "Geometrically induced spectrum in curved leaky wires", J. Phys. A. 34, 1439 (2001).
- [32] Germinet, F. and Klein, A., "Operator kernel estimates for functions of generalized Schrödinger operators", Proc. Am. Math. Soc. 131, 911 (2002).
- [33] Helffer, B. and Mohamed, A., "Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique", Ann. Inst. Fourier. 38, 98 (1988).
- [34] Helffer, B. and Sjöstrand, J., "Puits multiples en limite semi-classique II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbations.", Ann. I.H.P. Phys. Theor. 42, 127 (1985).
- [35] Landauer, R., "Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices", Philos. Mag. 21, 863 (1970).
- [36] Helffer, B. and Sjöstrand, J., "Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper", Lect. Notes in Phys. no. 345, Springer Verlag, 118 (1988).
- [37] Huang, K., Statistical Mechanics (Kluwer, 1963).
- [38] Iftimie, V., "Opérateurs différentiels magnétiques, stabilité des trous dans le spectre, invariance du spectre essentiel et applications", Comm. in P.D.E. 18, 651 (1993).

- [39] Jaksic, V. and Pillet, C-A., "Non-equilibrium steady states of finite quantum systems coupled to thermal reservoirs", Comm. Math. Phys. 226 no.1, 131 (2002).
- [40] Jaksic, V. and Pillet, C-A., "Mathematical theory of non-equilibrium quantum statistical mechanics. Dedicated to David Ruelle and Yasha Sinai on the occasion of their 65th birthdays", J. Statist. Phys. 108 no. 5-6, 787 (2002).
- [41] Joynt, R. and Prange, R., "Conditions for the quantum Hall effect", Phys. Rev. B 29, 3303 (1984).
- [42] Kanjilal, K. and Blume, D., "Nondivergent pseudopotential treatment of spin-polarized fermions under one- and three-dimensional harmonic confinement", Phys. Rev. A 70, 042709 (2004).
- [43] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators (Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976).
- [44] Kirsch, W. and Simon, B., "Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators", J. Funct. Anal. 75, 396 (1987).
- [45] Louis, D.: Thèse de doctorat, en préparation
- [46] Macris, N., Martin, Ph.A., and Pulé, J.V., "Diamagnetic currents", Commun. Math. Phys. 117, 215 (1988).
- [47] Macris, N., Martin, Ph.A., and Pulé, J.V., "Large volume asymptotics of Brownian integrals and orbital magnetism", Ann. I.H.P. Phys. Theor. 66, 147 (1997).
- [48] May, R.M., "Magnetic properties of charged ideal quantum gases in n dimensions", J. Math. Phys. 6, 1462 (1965).
- [49] Moldoveanu, V., Aldea, A., Manolescu, A., and Niţă, M., "Coulomb effects on the transport properties of quantum dots in strong magnetic field", Phys. Rev. B 63, 045301 (2001).
- [50] Nakamura, S., "Band spectrum for Schrödinger operators with strong periodic magnetic fields", Operator Theory: Advances and Applications 78, 261 (1995).
- [51] Nenciu, G., "Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields: rigorous justification of the effective hamiltonians", Rev. Mod. Phys. 63, 91 (1991).

- [52] Nenciu, G., "On asymptotic perturbation theory for quantum mechanics: Almost invariant subspaces and gauge invariant magnetic perturbation theory", J. Math. Phys. 43, 1273 (2002).
- [53] Olshanii, M., "Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons", Phys. Rev. Letters 81 no.5, 938 (1998).
- [54] Pedersen, T.G., "Variational approach to excitons in carbon nanotubes", Phys. Rev. B 67, 073401 (2003).
- [55] Pedersen, T.G., "Exciton effects in carbon nanotubes", Carbon 42, 1007 (2004).
- [56] Pedersen, T.G., Pedersen, K., Cornean, H.D., and Duclos, P., "Stability and signatures of biexcitons in carbon nanotubes", Nano Letters 5, no. 2, 291 (2005).
- [57] Rosenthal, C.M., "Solution of delta function model for heliumlike ions" Journ. Chem. Phys. 55 no.5, 2474 (1971).
- [58] Roth, L.M., "Theory of Bloch electrons in a magnetic field", J.Phys. Chem. Solids 23, 433 (1962).
- [59] Roth, L.M., "Theory of Faraday effect in solids", Phys. Rev. 133, A542 (1964).
- [60] Ruelle, D., Statistical Mechanics. Rigorous Results (W.A. Benjamin, Reading, 1991).
- [61] Schafroth, M.R., "Superconductivity of a Charged Ideal Bose Gas", Phys. Rev. 100, 463 (1955).
- [62] Schwinger, J., "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization", Phys. Rev. 82, 664 (1951).
- [63] Simon, S., Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms (Princeton University press, New Jersey, 1971).
- [64] Simon, B., "Schrödinger semigroups", Bull. Am. Math. Soc. (N. S.) 7, 447 (1982).
- [65] Slachmuylders, A.F., Partoens, B., Magnus, W., and Peeters, F.M.,: "Exciton states in cylindrical nanowires", http://arxiv.org/abs/condmat/0512385

- [66] Sondheimer, E.H., and Wilson, A.H., "The theory of the magnetoresistance effects in metals", Proc. Roy. Soc. (London) A 190, 435 (1947).
- [67] Streda, P., "Theory of quantized Hall conductivity in 2 dimensions", J. Phys. C.-Solid State Phys. 15, L717 (1982).
- [68] Thaller, B., *The Dirac equation* (Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1992).
- [69] Thouless, D.J., "Wannier functions for magnetic sub-bands", J. Phys. C.-Solid State Phys. 17, L325 (1984).
- [70] Yafaev, D.R., Mathematical Scattering Theory (Providence, Amer. Math. Soc., 1992).
- [71] Zak, J., "Dynamics of electrons in solids in external fields", Phys. Rev. 138, 686 (1968).