Fys1 og Nano3
7 mulige/typiske opgaver

Opgave 1. Lad $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være et skalarfelt givet ved:

$$\phi(x,y,z) = 9x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}zx + xy - 3. \tag{1}$$

Vis, at $(0,0,0)$ er et minimumpunkt for ϕ.

Opgave 2. Kurven γ er defineret ved

$$\gamma(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Vektorfeltet $\vec{F}$ er givet ved:

$$\vec{F}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Beregn $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$.

Opgave 3. Fladen S er defineret ved

$$\vec{R}(\theta,\phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi). \tag{4}$$

Vektorfeltet $\vec{F}$ er givet ved:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, xy, 0),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \tag{5}$$

1. Skriv $\vec{F}$ i sfæriske koordinater og beregn fluxintegralet gennem fladen $\int_S \vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$, hvor

$$\vec{d\sigma} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi} d\theta\ d\phi.$$

2. Skriv $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i sfæriske koordinater.
3. Lad V være kuglen med radius $r = 1$. Bestem $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\ dxdydz$.

Opgave 4. Lad $\vec{G}$ være et virkårligt tredimensionel vektorfelt. Vis, at

$$\nabla \times (x^2\vec{G}(x,y,z)) = 2x\vec{i} \times \vec{G}(x,y,z) + x^2(\nabla \times \vec{G}(x,y,z)).$$

Opgave 5. Bestem Fourier rækken for funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\cos^2(\pi x).$$

Vink: brug additionsformlerne gentagne gange og partiel integration.

Opgave 6. Der er givet en ligning

$$-y''(x) + 6y(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

1. Bestem Fourier transformationen $\hat{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} y(x) dx$;
2. Skriv y som en foldning af to funktioner.

Opgave 7. Der er givet en ligning

$$-y''(x) + y(x) = 2x, \quad 0 < x < 1. \tag{7}$$

Find en løsning som opfylder randbetingelsen $y(0) = 0$ og $y(1) = 1$.
Vink: find først ligningen opfyldt af $z(x) = y(x) - x$. Bemærk, at $z(0) = z(1) = 0$.