

Fys2 og Nano4
Dataanalyse og Differentialligninger
Prøveeksamen

Dato: marts 2008

Tidspunkt: Kl. 09:00–12:00

Sted: Skjernvej 4, 9220 Aalborg.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, lommeregner, osv.).

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Eksamenssættet findes på den næste side.

Bemærkning: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt. For at bestå eksamenen, kræves der at få mindst 50 ud af 100 mulige point.

Opgave 1. Betragt ligningen:

$$x^2 y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = x + 2, \quad x > 0. \quad (1)$$

1. (10 point) Find to lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning.
2. (10 point) Find en partikulær løsning til den ikke homogene ligning, ved hjælp af konstanter variationsmetode.
3. (5 point) Find løsningen y som opfylder $y(1) = 0$ og $y'(1) = 0$.

Opgave 2. Betragt ligningen:

$$y''(x) + xy'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

1. (10 point) Find to lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning, som rækkeløsninger i nærheden af $x_0 = 0$.
2. (10 point) Find en partikulær løsning til den ikke homogene ligning, ved hjælp af gættemetoden.
3. (5 point) Find løsningen y som opfylder $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Opgave 3. En todimensionel kvantepartikel ligger i området $[0, 2] \times [0, 2]$, og er beskrevet af bølgefunktionen $\psi(x, y) = C\sqrt{yx}$, hvor $C > 0$.

1. (5 point) Hvad skal C være således at $p(x, y) := \psi^2(x, y)$ definerer en tæthedfunktion for koordinaterne (X, Y) ?
2. (15 point) Find fordelingsfunktionen for variabelen $Z = X + Y$, givet ved

$$F_Z(t) = Prob(x + y \leq t) = \int \int_{x+y \leq t} p(x, y) dx dy.$$

3. (15 point) Find $Var(Z)$.

Opgave 4. (15 point) Vi måler to reele, uafhængige stokastiske variable A og B . Middelværdien af A er $\mu_A = 2$ og middelværdien af B er $\mu_B = 3$. Deres varianser er $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 1$. Vi er interesserede i størrelsen $f(A, B) = \ln(A^2 + B^2)$. Find den relative fejl

$$\epsilon_f := \frac{\sigma_f}{\bar{f}}.$$