

# Matematikken bag Numb3rs

UNF 2010.

Lisbeth Fajstrup

Institut for Matematiske Fag



# TV-programmet Numb3rs

- Produceret af CBS i foreløbig 6 sæsoner med 13, 24, 24, 18, 23 og formentlig 16 afsnit. I alt 118. OBS: Sidste sæson ??
- Sendt siden september 2006 i Danmark på Kanal 5.

# TV-programmet Numb3rs

- 25. november 2009 sendtes afsnit nummer 75 i DK. (Sæson 5 afsnit 6 "Magic Show.")
- Mest sete fredag aften i USA; mange seere i DK.
- Og det er et program med matematik i...

# Numb3rs bloggen

- <http://numb3rs.math.aau.dk>
- Om matematikken i de enkelte programmer
- På dansk.
- 173 indlæg indtil videre – primært forfattet af mig – with a little help from my friends...
- Formål: At forklare mere om den matematik, der nævnes i TV-programmet

# Matematiker på arbejde



Billedet stillet til rådighed af Kanal 5.

# Matematiker på arbejde



Billedet stillet til rådighed af Kanal 5.

Charlies bror  
Don og hans  
næstkomman-  
derende,  
Megan. (Som  
ikke er med  
mere)

Billedet stillet til rådighed  
af Kanal 5.



# Matematik og forbrydelser

- Hvor bruges matematikken.
- Hvilken matematik bruges?



# Matematik og forbrydelser

- Hvor bruges matematikken.
- Hvilken matematik bruges?

Mange forskellige grene af matematik.

Fra elementær regning til splinternye  
forskningsresultater

# Matematik og forbrydelser

- Hvor bruges matematikken.
- Hvilken matematik bruges?

Mange forskellige grene af matematik.

Fra elementær regning til splinternye  
forskningsresultater

Anvendelser i biologi, kemi, fysik, økonomi,  
sociologi, datalogi, geologi, ...

# Matematik og forbrydelser

- Hvor bruges matematikken.
- Hvilken matematik bruges?

Mange forskellige grene af matematik.

Fra elementær regning til splinternye  
forskningsresultater

Anvendelser i biologi, kemi, fysik, økonomi,  
sociologi, datalogi, geologi, ...

Oftest skjult i computer, GPS, mobil, kamera...

# Numb3rs åbner de sorte kasser.

- Matematikken er ofte skjult bag brugerflader
- Numb3rs peger på matematikken bag de smarte anvendelser
- Ofte vil man undgå det – de færreste vil vide, hvordan Google virker – eller Photoshop – GPS – mobiltelefon - fingeraftryksanalyse – DNA analyse

# Plan for foredraget

- Matematikken i udsendelse 1 – geografisk profilering. Inverse problemer.
- Blodstænksanalyse (ikke noget bestemt afsnit, men pæn gymnasiematematik)
- Nål i en høstak matematik, bl.a. ansigtsgenkendelse
- Vigtigheden af svære problemer!
- Andre matematikemner, hvis jeg når det.

# Spørg!

- Der er sikkert andre, der er i tvivl om det samme.
- Og nu skal vi se Numb3rs...

# Geografisk profilering

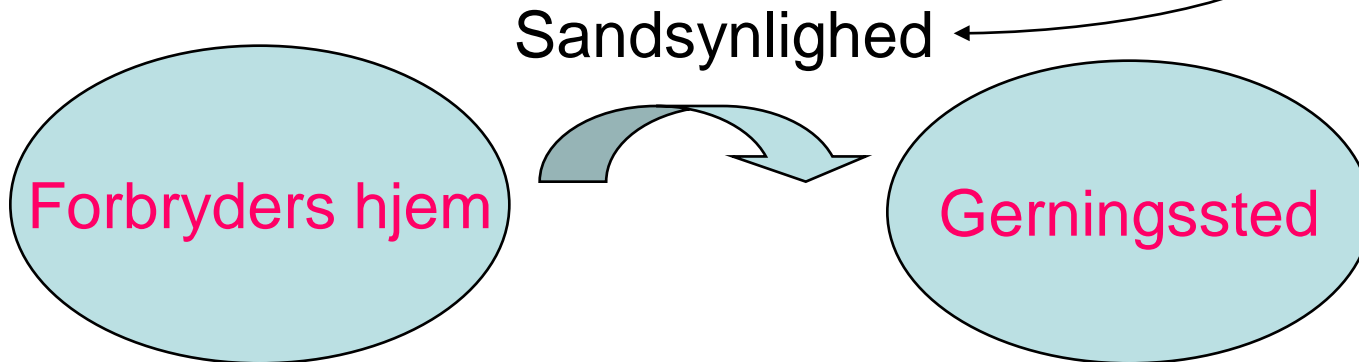
Kim Rossmo [www.ecricanada.com](http://www.ecricanada.com)

Første udsendelse af Numb3rs.

$$p_{ij} = k \sum_{n=1}^c \left[ \frac{\varphi}{(|x_i - x_n| + |y_j - y_n|)^f} + \frac{(1 - \varphi)B^{g-f}}{(2B - |x_i - x_n| - |y_j - y_n|)^g} \right]$$

# Geografisk profilering

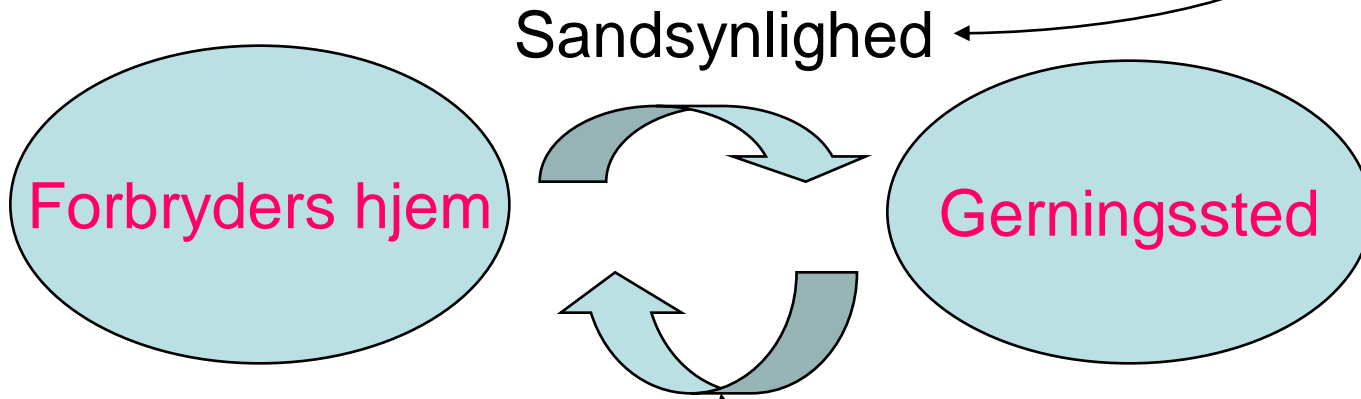
- Ide: Hvis vi kender sammenhæng





# Geografisk profilering

- Ide: Hvis vi kender sammenhæng



Kan vi udtale os om  
Udfra *mange* gerningssteder.

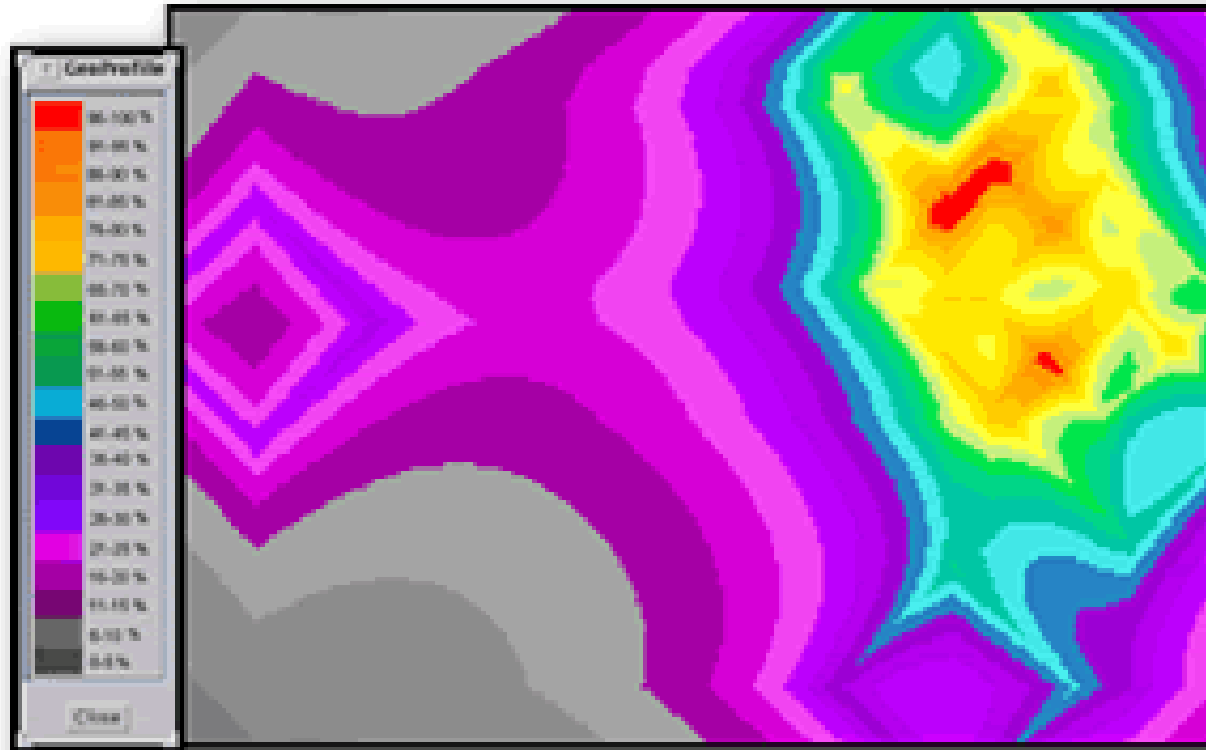
# Rossmo's formel

$$p_{ij} = k \sum_{n=1}^c \left[ \frac{\varphi}{(|x_i - x_n| + |y_j - y_n|)^f} + \frac{(1 - \varphi)B^{g-f}}{(2B - |x_i - x_n| - |y_j - y_n|)^g} \right]$$

- Sandsynligheden for, at forbryderen bor i koordinat  $(x_i, y_j)$
- Gerningsstederne er i  $(x_n, y_n)$
- Matematik: Avanceret brug af Bayes' formel  $P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)$

Sandsynligheden for B givet A, ud fra den "omvendte".

# Kort fra Rossmo's program, Rigel



Probability of Offender Residence

# Flere inverse problemer

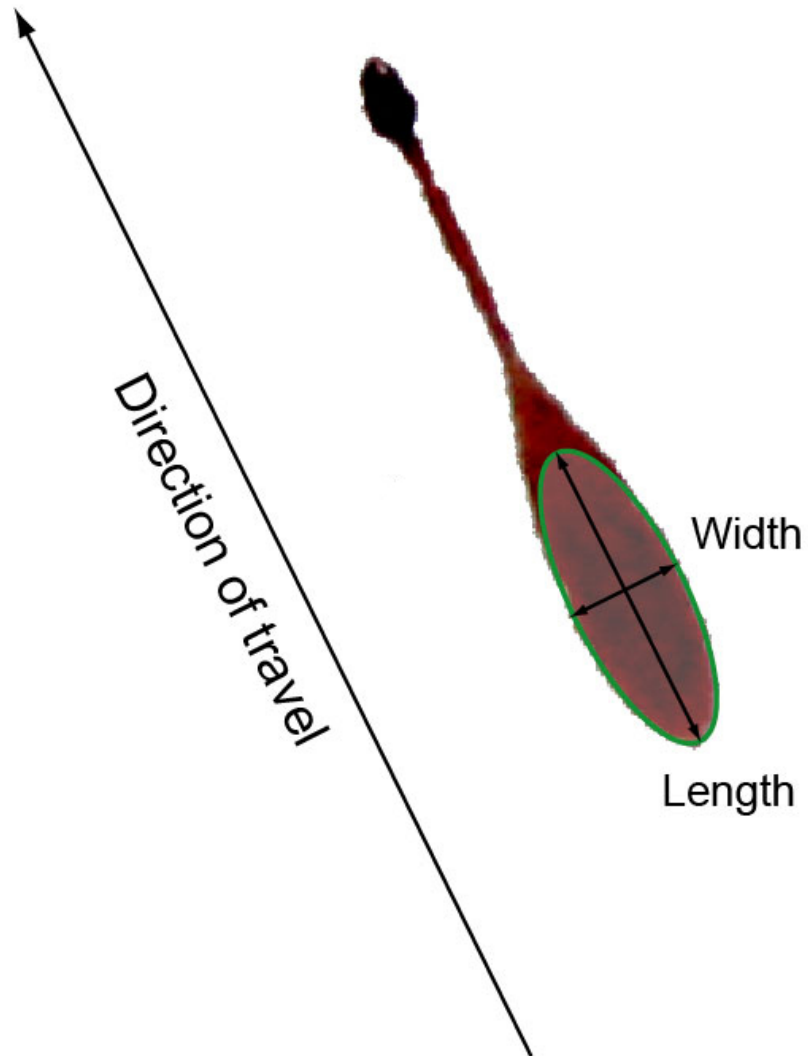
- Elektrokardiogram -> hjertefunktion
- Måling af spænding på overfladen af flyvinger -> Er der revner indeni
- Fra et forvrænget billede til det "rigtige"
- ... Alt sammen hvis man kender den omvendte sammenhæng.
- Og ofte "med en vis sandsynlighed"

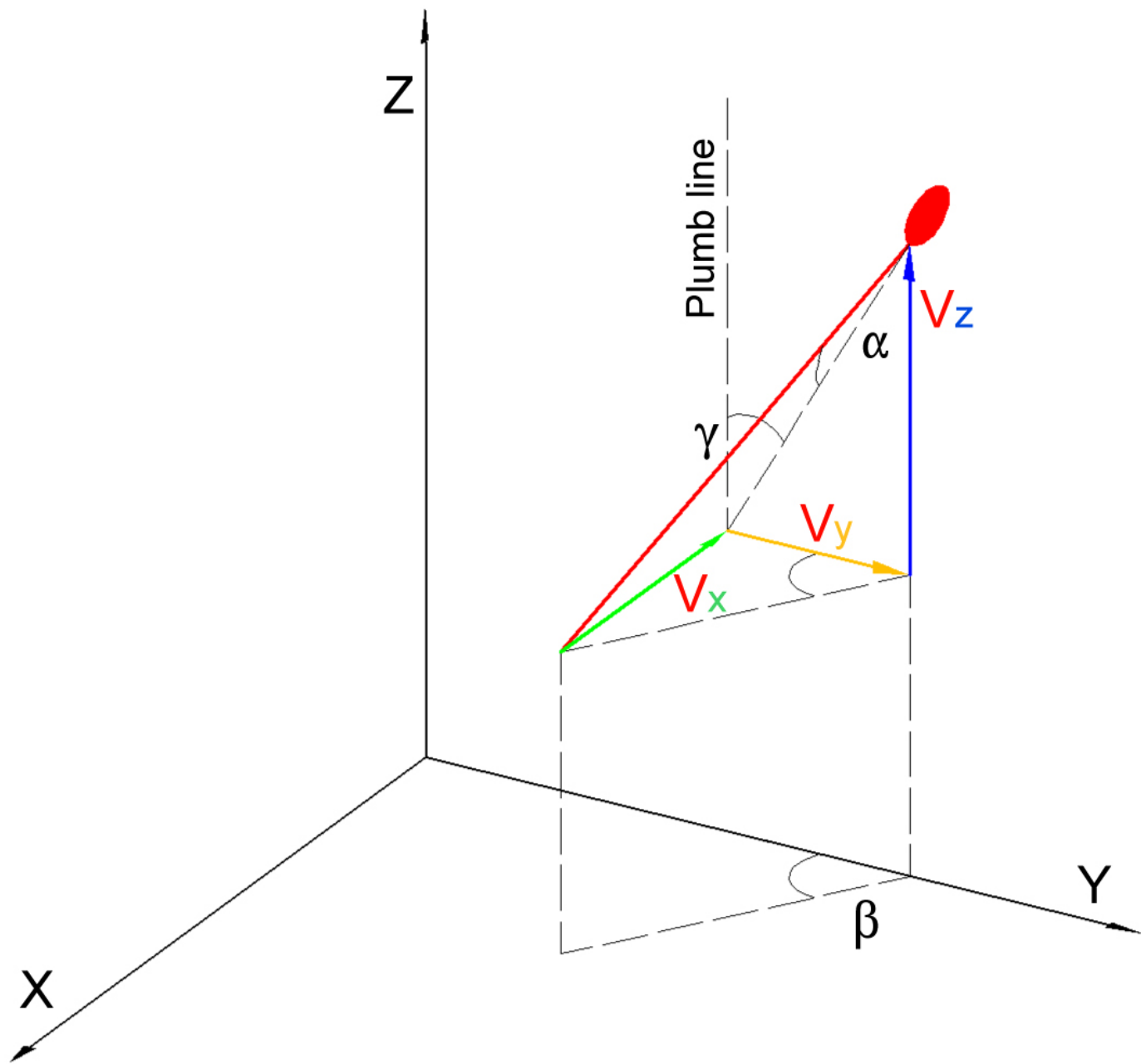
# Blodstænksanalyse

- Problem: Se på blodstænk i lokalet og regn ud, hvor offeret er blevet skudt.
- Bloddråber er kugleformede til de rammer noget
- De bevæger sig langs "sure" parabler (fysik-kasteparabler)
- Pletterne er ellipseformede (cirka)
- Se også [www.iabpa.org](http://www.iabpa.org) International Association of Bloodstain Pattern Analysis.

# En bloddråbe på en væg

billede fra Wikipedia





$$\sin(\alpha) = \text{width} / \text{length}$$

$\gamma$  måles som vinkel med lodlinjen

Nu regner vi:

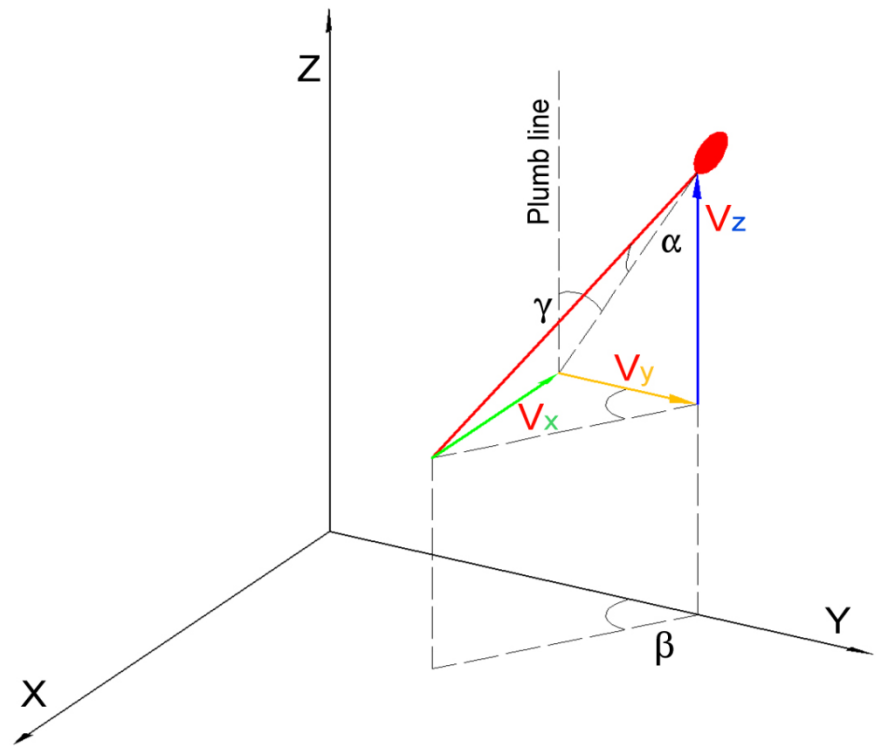
$$\tan \alpha = V_x / c$$

$$\sin \gamma = V_y / c$$

$$\tan \beta = V_x / V_y$$

Altså

$$\tan(\beta) = \frac{\tan \alpha}{\sin \gamma}$$





# Udregninger om blodstænk

$$\sin \alpha = \textit{width/length}$$

$\gamma$  måles som vinkel med lodlinjen

$$\tan \alpha = Vx/c$$

$$\sin \gamma = Vy/c$$

$$\tan \beta = Vx/Vy = \frac{\tan \alpha}{\sin \gamma}$$

Mange vandrette linjer giver skæringsområde i XY-planen.

Z-koordinaten kan man estimere (parabelbaner)

# Nål i høstak problemer

- Store datamængder fra satellitbilleder, radar, kriminalregisteret, fingeraftryk,..
- Opgave: Indskrænk mulighederne, find mønstre/system i data
- Metode: Statistik f.eks. a la bedste rette linje
- Opgave: Find effektiv lagring.
- Metode: Mange – wavelets, curvelets,...

# Billedanalyse – eigenfaces (fra 3.4 The Mole)

- Opgave: 1) Fra rigtig mange pixels til mindre information (effektiv lagring).  
2) Mål for, om to "billeder" er tæt på hinanden – er det samme ansigt, fingeraftryk, underskrift, maler,...?
- Grundide: Skil væsentlig fra uvæsentlig information. Og smid den uvæsentlige væk. Udnyt, at ansigter ligner hinanden mere, end de ligner f.eks. landskaber.

# Egenfjæs/eigenfaces



Beskriv ansigter som en vægtet sum af færre  
"ansigter" Kurt =  $\frac{2}{3}$  Søren +  $\frac{1}{7}$  Mette  
"Egenfjæs" – ikke rigtige ansigter.

# Algebra af billeder

- Summen af to billeder B og C med hver 600x800 pixels. Hver pixel har en værdi mellem 0 og 255.

Summen  $B \oplus C$  er et billede hvor pixel  $i, j$  har værdien  $(B_{i,j} + C_{i,j})$

Tilsvarende kan man gange et billede med et tal ved at gange hver pixelværdi.

# Et rum af ENORMT høj dimension

- Hver pixel er en koordinat – f.eks.  $600 \times 800 = 480000$  koordinater! Hver mellem 0 og 255
- Ud fra en stor samling af billeder af ansigter udregnes "middelfjæset" som gennemsnit af hver koordinat.
- Ansigter beskrives ved, hvor meget de *afviger* fra middelfjæset. (Stadig mange koordinater.)

# Middelfjæs fra Rice University

<http://cnx.org/content/m12531/latest/>



# Eksempel (to koordinater)

- Find det midterste punkt – middelværdi af alle  $x$ -koordinater og af alle  $y$ -koordinater. Lav differenser til midtpunkt. Hvis punkterne er på linje beskrives de ved, hvor langt ud af linjen de ligger i forhold til midtpunktet, i.e., 1 parameter.
- Punkterne ligger sikkert ikke helt på linje
- Find en linje, der tilnærmer godt (retning med størst samlet variation)



# Med mange koordinater.

- Struktur svarer til, at færre koordinater er nok.

Eksempel i rummet.  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(-1, 2, 3)$

$$V=(1, 1, 1), w=(1, 0, -1)$$

$$(2, 1, 0)=1v+1w$$

$$(0, 1, 2)=1v-1w$$

$$(-1, 2, 3)=1v-2w$$

# Med mange koordinater.

- Struktur svarer til, at færre koordinater er nok.

Eksempel i rummet.  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(-1, 2, 3)$

$V=(1, 1, 1)$ ,  $w=(1, 0, -1)$

$(2, 1, 0)=1v+1w$  *koordinater*  $(1, 1)$

$(0, 1, 2)=1v-1w$  *koordinater*  $(1, -1)$

$(-1, 2, 3)=1v-2w$  *koordinater*  $(1, -2)$

*Fra 3 til 2 koordinater*

# Egenfjæs

- Et ansigt med koordinater  $(1/2, 1/4, 1/4, \dots)$  er middelfjæset +  
 $\frac{1}{2}(\text{egenfjæs\#1}) + \frac{1}{4}(\text{egenfjæs\#2}) + \frac{1}{4}(\dots) + \dots$

Antal koordinater = antal egenfjæs

Man kan sammenligne ansigter - med hinanden eller med dem, man har i en database af ansigter (forbryderalbum)

Man kan genkende, om noget er et ansigt.

# Egenfjæs

<http://cnx.org/content/m12531/latest/>

Masser af hits i Google.

# Billedebehandling i Numb3rs

- Lagring af fingeraftryk (og matching) - wavelets
- Underskrifter - curvelets
- Malerier (genkend kunstneren) – wavelets og curvelets
- Radarbilleder
- Satellitbilleder – følg en bil gennem LA
- Gendan billede efter sløring – wavelets, differentiaalligninger,...

# Nødvendigheden af svære problemer

- Kryptering, "Kodning":

Vigtigheden af *svære problemer*

Det skal være *svært* at bryde bankens eller militærets hemmeligheder.

At gætte signalet i en elektronisk bilnøgle

At bruge en andens digitale signatur

Og meget mere.

# Et svært problem i matematik

- Masser af muligheder! Hvor svært skal det være?
- Svært = svært at løse på indenfor *rimelig* tid. På en computer.
- Hvordan ved man, det er svært? (Det gør vi faktisk heller ikke rigtig – se P versus NP på [www.claymath.org](http://www.claymath.org) eller på min blog)

# Ny matematik bag

- Teknologisk udvikling bygger (også) på ny matematik – matematisk forskning fra i sidste uge
- Sommetider meget abstrakte ideer
- Eksempel: Metrik – afstandsmål.



# Matematik i Numb3rs

- Der er rigtig mange emner. Gode ideer til studieretningsprojekter?
  - Surf rundt på <http://numb3rs.math.aau.dk>
  - Se en lang liste på <http://www.redhawke.org/content/view/308/82/>  
(på engelsk. Links er mest til Wikipedia.)
- <http://numb3rs.wolfram.com> – flotte animationer af matematik. Om episoder spredt i sæson 3. Plus hele sæson 4, 5 og (snart) 6.
- Desuden masser af fansites. Uden matematik.

# Konklusioner

- Numb3rs kan ses, uden man behøver forstå matematikken
- Den matematik, der optræder, er nogenlunde rigtigt beskrevet (Men sommetider ikke nødvendig ved opklaringen)
- Ingen matematiker ved så meget som Charlie. Eller arbejder så hurtigt.
- Læs mere på min blog. Og se fjernsyn...