

Et Party Trick -eller Buffons princip

Af MARTIN BØGSTED HANSEN,
Afdeling for Matematik

Til en festlig lejlighed fremdrag en snor, krøl den sammen og stil følgende opgave: “Hvem kan give mig det bedste bud på længden af snoren uden at tage den op og røre ved den?”

De fleste vil nok prøve en af følgende ting: (a) gætte vildt ud i luften eller (b) approksimere kurven med rette linjer og addere længden af linjestykkerne. Men hvis gæsterne kun har begrænset tid til rådighed og snoren er meget krøllet, så er (a) måske den eneste realistiske mulighed - og dog - statistikerne med kendskab til geometrisk sandsynlighedsregning vil nemlig straks udbryde: “Det må da være muligt at anvende Buffons princip!”.

Han går derefter straks igang med at konstruere et testsystem af parallelle linjer som vist i Figur 1(a). Hvis han udsætter dette system af linjer for en tilfældig rotation og lægger det ned over snoren (eller ækvivalent roterer snoren) gælder der nemlig at

$$E = \frac{2}{\pi} \frac{L}{A} K,$$

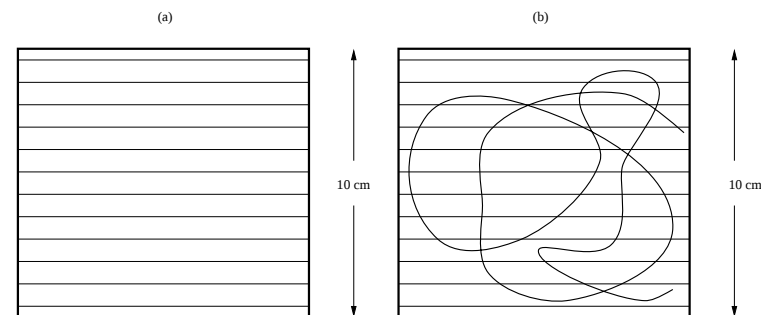
hvor E er middelværdien af antal skæringspunkter mellem snoren og linjerne, K er snorens længde, L er længden testsystemet indenfor observationsvinduet og A er arealet af observationsvinduet. Hvis man kun foretager et eksperiment som i Figur 1(b), får man følgende estimat for kurvens længde

$$\widehat{K} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{100}{120} \cdot 45 \text{ cm} \simeq 59 \text{ cm},$$

idet der er 45 skæringspunkter, $A = 100 \text{ cm}^2$ og $L = 120 \text{ cm}$. Dette kan så sammenlignes med snorens faktiske længde på 65 cm.

Ofte beregner man estimatet $\widehat{K}$ ved hjælp af det gennemsnitlige antal skæringspunkter for et antal uafhængige rotationer. Det er endvidere muligt at bruge “store tals lov” og “central grænseværdisætning”, som i sikkert husker fra MAT 1, til at vise at estimatet $\widehat{K}$ i en vis forstand bliver bedre og bedre når antal rotationer forøges samt vurdere med hvilken rate $\widehat{K}$ nærmer sig K .

Hvis man betragter specialtilfældet bestående i at man erstatter kurven i Figur 1(b) med et linjestykke af kendt længde og spørger hvad sandsynligheden er for



Figur 1: (a) Et system af linjer set gennem et observationsvindue; (b) Systemet af linjer lagt ned over en snor af længde 65 cm. Målestoksforholdet er angivet ved et kvadrat på 10×10 cm.

skæring mellem linjestykket og testsystemet af parallelle linjer stiller man samme spørgsmål som Buffon gjorde i 1777. Buffons nåleproblem regnes som det første problem i geometrisk sandsynlighedsregning. Siden er der dukket et væld af metoder op hvor man ved hjælp af lavere dimensionale testsystemer kan udtale sig om højere dimensionale karakteristika, såsom volumenberegninger vha. plane snit og gitre af punkter.

Hvis man selv vil eksperimentere med Buffons nåleproblem kan man selvfølgelig selv tegne et testsystem og kaste nåle ned over det, men man kan også besøge en af de mange “Buffons nåle” homepages på internettet:

<http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html>

En ting er teori noget andet er praksis. Ud af geometrisk sandsynlighedsregning er groet et helt statistisk område kaldet stereologi. Denne gren bruger således ovenstående formler til hurtigt at kvantificere rumlige strukturer ved simple tællinger. Dette har f.eks. stor betydning indenfor medicin, biologi og geologi, hvor man ved hjælp af mikroskopibilleder er interesseret i at kvantificere strukturer i væv og metaller. Stereologi betragtes normalt som en del af den rumlige statistik, som er et af forskningsområderne på afdelingen med bl.a. Jesper Møller og jeg selv som deltagere. Men området er også ved at udbrede sig til undervisningen. Efter sommerferien bliver rumlig statistik således emnet for de statistikstuderende på Mat 5 og 6. Desuden vil der snart blive udbudt en international masters uddannelse i statistik fra afdelingen, hvor det første år skal have fokus på rumlig statistik.