

Wavelet Analyse

Arne Jensen
Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

1 Introduktion

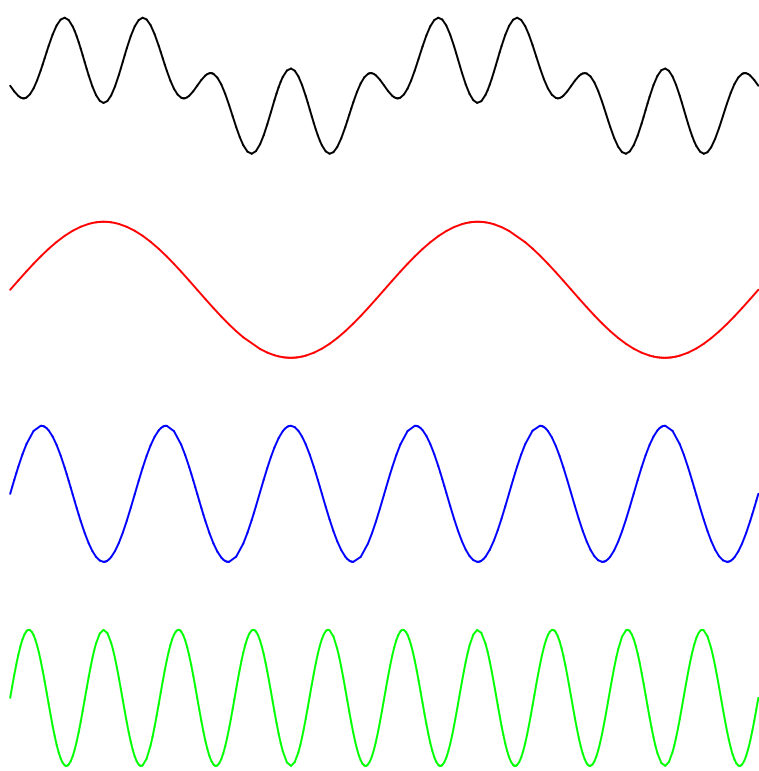
Numb3rs episoden om pengeforfalskning brugte wavelet analyse. Wavelet analyse er en relativt ny opdagelse, som har fundet mange anvendelser indenfor analyse og behandling af signaler (for eksempel musik) og billeder (for eksempel fingeraftryk).

Wavelet analysen startede i begyndelsen af 1980-erne. En ingeniør ved det franske olieselskab Elf Aquitaine ved navn Jean Morlet skulle analysere seismografudskrifter fra olieeftersøgning. Sådanne signaler er meget uregelmæssige, med store udsving over korte tidsintervaller. Han fandt på en ny metode til dette. Den virkede udmærket, men han ville gerne forstå den bedre. Så han kontaktede den teoretiske fysiker Alex Grossmann i Marseille. Han lavede en matematisk ramme for metoden, som de to kaldte ondelette analyse (ondelette betyder lille bølge på fransk). På engelsk blev det til wavelet. Det ord har vi overtaget på dansk, selv om der er et udmærket dansk ord for 'lille bølge', nemlig 'skvulp'.

Fra omkring 1985 kom der gang i udviklingen af både teorien og anvendelserne af wavelets. Mange forskere medvirkede hertil, og fra midt i 1990-erne blev wavelet analyse efterhånden meget udbredt. Mange moderne produkter har elementer af wavelets i sig. For eksempel er wavelets en af grundene til, at det er muligt at få musik til at fylde meget lidt, og alligevel lyde ganske godt, som for eksempel på en mp3-afspiller. Det samme gælder video, hvor man også bruger wavelet metoder til at få en hel film til at fylde lidt nok til at kunne ligge på en DVD, og alligevel ses i god kvalitet.

2 Idéen bag wavelets

Den traditionelle måde at analysere for eksempel lydssignaler på er ved at opløse lyden i en sum af periodiske svingninger.



Figur 1: En svingning (sort) og de tre komponenter, den er sammensat af (rød, blå og grøn)

De periodiske svingninger er repræsenteret ved sinus og cosinus funktioner. Hvis vi tager funktionerne $\sin(t)$, $\sin(3t)$ og $\sin(5t)$, og danner kombinationen

$$\sin(t) + \frac{1}{2} \sin(3t) - \sin(5t),$$

så får vi en mere kompliceret periodisk svingende kurve. Resultatet er vist i Figur 1, som den første graf. Grafer af de tre sinus-funktioner er vist nedenunder.

I anvendelsen på for eksempel analyse af lyd skal man så forestille sig, at man tager perioden af den langsomste svingning i opløsningen til at være varigheden af signalet. I Figur 1 er der to perioder for den langsomste svingning.

I Figur 2 er der endnu et eksempel på et kompliceret periodisk signal, som kan repræsenteres meget simpelt ved en sum af fire sinus-funktioner:

$$\sin(t) + 1/2 \sin(4t) + 1/4 \sin(16t) + 1/6 \sin(64t).$$

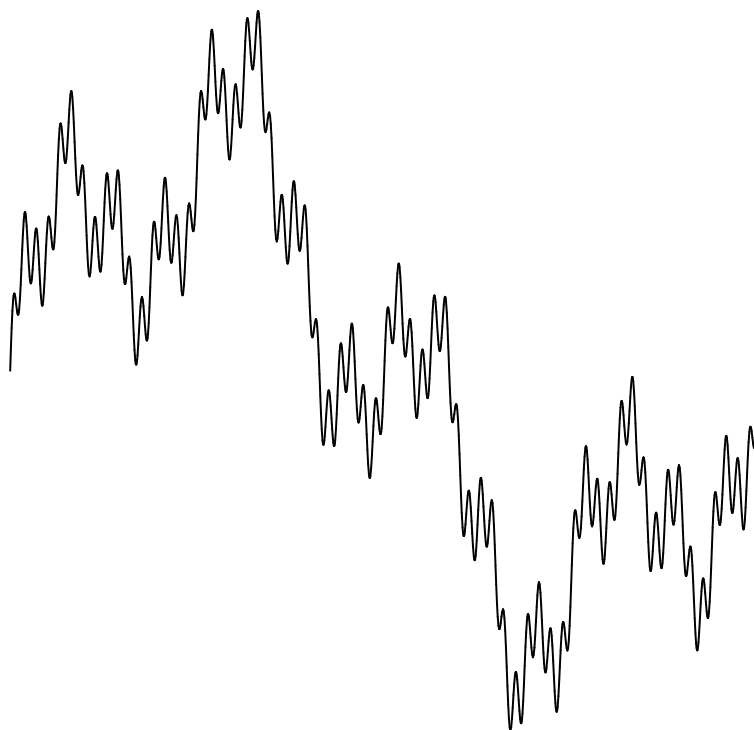
Et af problemerne med at analysere signaler ved hjælp af summer af sinus og cosinus funktioner er, at signaler med korte hurtige variationer, for eksempel et slag på en tromme, er svære at repræsentere simpelt, dvs med få sinus-svingninger. Det er her wavelet analyse kommer ind.

I stedet for at basere analysen på funktioner, der svinger regelmæssigt i al evighed, så anvender man funktioner der kun svinger i et endeligt tidsinterval, og både før og efter dette interval er nul. Et eksempel på en wavelet er givet i Figur 3. I wavelet analysen analyserer man signaler ved hjælp af sådanne wavelets. Man flytter rundt med dem (translaterer dem), og man strækker dem ud og klemmer dem sammen (skalærer dem), for at få mulighed for at få alle detaljer i signalet med. Figur 4 viser waveletten fra Figur 3 flyttet til to forskellige positioner i tid.

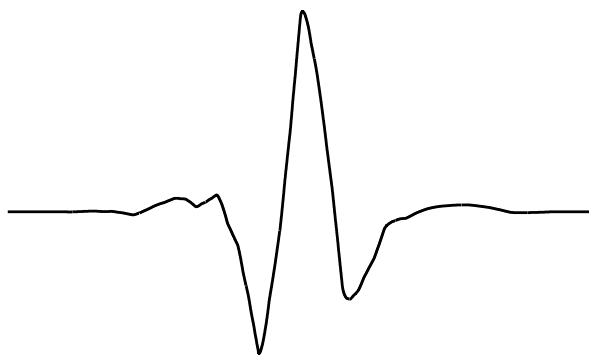
3 Anvendelser af wavelets

Wavelets anvendes til mange ting, for eksempel kompression af musik og video, som nævnt ovenfor. Der er også en nyere standard for billedkompression, der hedder JPEG2000, som er baseret på wavelets. Den er allerede tilgængelig i nogle programmer til behandling af billeder, og vil uden tvivl blive standard i digitale kameraer inden længe.

I Numb3rs anvendes wavelet metoder til at skabe flere detaljer i et billede end det tilsyneladende indeholder. Dette kan virke mystisk, og forklaringen anvender meget matematik, så jeg nøjes med at vise et eksempel. I Figur 5



Figur 2: En svingning givet ved $\sin(t) + 1/2 \sin(4t) + 1/4 \sin(16t) + 1/6 \sin(64t)$.

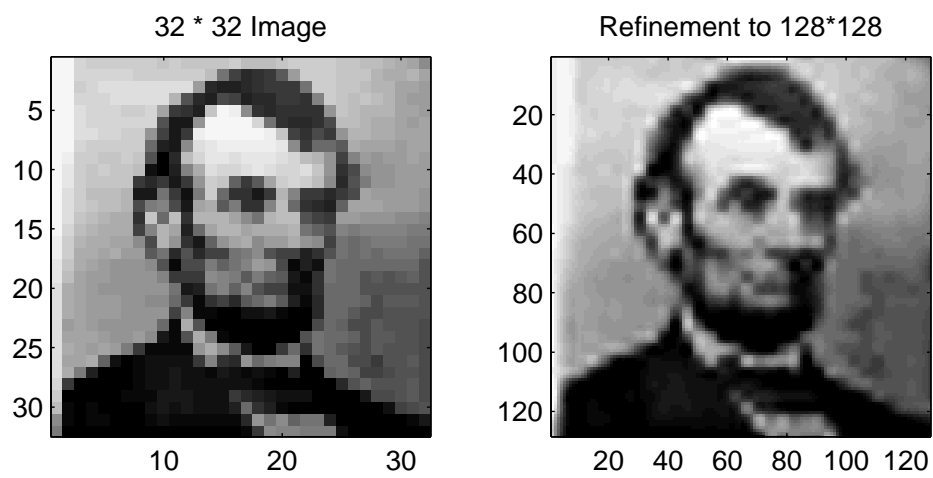


Figur 3: Et eksempel på en wavelet.



Figur 4: Translation af en wavelet.

er der til venstre en billede, som har 32 gange 32 pixels. Til højre er det ved hjælp af wavelet metoder forfinet til 128 gange 128 pixel. Det er relativt let at identificere personen til højre som den amerikanske præsident Lincoln, mens det er umuligt fra billedet til venstre. Dette eksempel er lavet af kolleger ved Stanford Universitetet.



Figur 5: Genskabelse af detaljer i et billede.