AALBORG UNIVERSITET
INSTITUT FOR
MATEMATISKE FAG
EVU2011

ALGEBRA 1
SPISESEDDEL 2.

LISBETH FAJSTRUP

**Mål og indhold:** En afbildning $f : M \times M \to M$, hvor $M$ er en mængde, kaldes en *binær operation.* Notation: $f(m_1, m_2) = m_1 m_2$. Kompositionen på en gruppe er et eksempel på en binær struktur, men der er mange andre eksempler. En binær operation er

**associativ** hvis $(ab)c = a(bc)$ for alle $a, b, c \in M$

**kommutativ** hvis $ab = ba$ for alle $a, b \in M$

Eksempel: $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = x - y$ er *ikke* associativ. Og heller ikke *kommutativ*
Et element $e \in M$ er et *neutralelement* for , hvis $em = m \star e = m$ for alle $m \in M$. Der er højst ét neutralelement for en binær operation. En *monoid* er en mængde med en associativ binær operation, som har et neutralelement. Eksempler: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(M_n(\mathbb{R}), +)$, $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Men også mere "eksotiske", eller i hvert fald overraskende kompositioner:
Lad $U$ være en mængde og $M$ mængden af delmængder af $U$: $M = \{X \subseteq U\}$. Kompositionerne $X_1 \cup X_2$ og $X_1 \cap X_2$ er binære operationer på $M$, og $(M, \cup)$ og $(M, \cap)$ er monoider.
Kompositionen $(x, y) \to max(x, y)$ er en monoidstruktur på $\mathbb{R}$ med neutralelement 0.
Et element $a \in M$ er en *enhed*, hvis det har en invers. Eksempelvis er $-1$ og 1 endhederne i $\mathbb{Z}, \cdot$. I $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ er *enhederne* de invertible matricer.
En monoid kaldes en *gruppe*, hvis alle elementer er enheder. (Se sidste spiseseddel).
Eksempler på grupper:

- $S_n$, permutationerne af en mængde med $n$ elementer.
- $A_n$, de *lige* permutationer af en mængde med $n$ elementer, kaldes den *alternerende gruppe* af grad $n$.
- I mellemperioden har I set på $\mathbb{Z}_n^*$ med multiplikation og vist, den er en gruppe. Det er et eksempel på et mere generelt fænomen, nemlig at enhederne i en monoid udgør en gruppe.
- Og mange flere - se bogen.

Vi vil i resten af dette kursus studere grupper: Eksempler, egenskaber, struktur etc. Notation: Kompositionen skrives ofte slet ikke; man skriver $ab = ab$ (multiplikativ notation), eller man skriver $a * b = a + b$ (additiv notation), når det er det, den plejer at hedde. Netralelementet kaldes 1, når der bruges multiplikativ notation, og det kaldes 0, hvis der bruges additiv notation.
En afbildning mellem to grupper, $f : G_1 \to G_2$ er en *homomorfi*, hvis $f(a_{G_1} b) = f(a) \times_{G_2} f(b)$ (her er $\star_{G_i}$ kompositionen i gruppen $G_i$). Hvis en homomorfi af grupper er bijektiv, kaldes den en isomorfi, og den inverse vil altid være en homomorfi. Isomorfier bevarer *strukturelle egenskaber*.
*Den cykliske gruppe af orden n*: En gruppe $G = \{1, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$, hvor $a_i = a_1^i$ og $a_1^n = 1$ kaldes en cyklisk gruppe af orden $n$. Den skrives ofte $C_n = \{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8848
FAJSTRUP@MATH.AAU.DK

og kaldes *den* cykliske gruppe af orden $n$, fordi alle cykliske grupper af samme orden er ens, bortset fra en eventuel omrokering af elementerne, en isomorfi.
Når man undersøger en bestemt gruppe, er et værktøj at se på gruppens *undergrupper*.
En delmængde af en gruppe, $H \subset G$ er en *undergruppe*, hvis kompositionen på $G$ giver en gruppestruktur på $H$. Det er faktisk nok at vise, at $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H$. (Exercise 2.3.2 p. 86).
Der er mange typer af undergrupper:

- Lad $g \in G$ og lad $< g >= \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Da er $< g >$ en undergruppe af $G$ og kaldes den *cykliske undergruppe af G frembragt af g*, og antallet af elementer i $< g >$ kaldes *ordenen* af $g$ i $G$. Hvis $< g >= G$ er $G$ en cyklisk gruppe. Hvis $G$ har orden $1, 2$ eller 3, så er $G$ nødvendigvis cyklisk. Kleins 4-gruppe, $K_4$ er det mindste eksempel på en ikke-cyklisk gruppe.
- Centeret for $G$ er undergruppe $Z(G) = \{z \in G | zg = gz \quad \text{for alle} \quad g \in G\}$ - de elementer, der kommuterer med alle andre elementer i $G$. $Z(G)$ er en abelsk undergruppe.
- En undergruppe $H$ af $G$ er *normal*, hvis $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\} = H$ for ethvert $g \in G$.

Normale undergrupper er væsentlige i beskrivelsen af en gruppe. En gruppe $G$, som ikke har andre normale undergrupper end $\{1\} \in G$ og $G$ selv, kaldes *simple* grupper. Klassifikation af alle endelige simple grupper var et enormt forskningsprojekt, og beviset er spredt over mange artikler - omfattende omkring 15000 sider. Resultatet er en liste, der starter med cykliske grupper af primtalsorden, alternerende grupper $A_n$ for $n \geq 5$ , herefter følger endnu nogle familier af grupper og til sidst er 23 "sporadiske" grupper - udenfor systematikken, hvoraf den største er Monstergruppen $M$, som har orden

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Se også Wikipedia eller Math World.

# Torsdag 3/4-2011, 9-12

**Forelæsning:** Binære operationer, monoider, grupper og undergrupper.

**Øvelser:**

- p. 72 opg. 2.1.3, 2.1.5, 2.1.20
- 2.2.1 a), b), c),d), e), h)
- 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5, 2.2.9, 2.2.12, 2.2.10 a) 2.2.19, 2.2.26, 2.2.27
- 2.3.1 a,b,f, 2.3.2, 2.3.7, 2.3.10, 2.3.16, 2.3.17

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST

AALBORG UNIVERSITET
INSTITUT FOR
MATEMATISKE FAG
EVU2011 ALGEBRA 1
SPISESEDDEL 2. LISBETH FAJSTRUP

# Fredag 4/4-2011, 18-21

**Forelæsning:** Cykliske grupper, ordenen af et element, homomorfier og isomorfier.

**Øvelser:**

- 2.4.1, 2.4.2, 2.4.7, 2.4.11, 2.4.17, 2.4.14, 2.4.13, 2.4.23, 2.4.27, 2.4.29
- 2.5.1, 2.5.2, 2.5.4, 2.5.9, 2.5.12 a,b,c,d,i,j, 2.5.14, 2.5.18, 2.5.21, 2.5.25, 2.5.26, 2.5.31

## Arbejde i mellemperioden:

Opgaverne ovenfor og desuden er temaet undergrupper, normale undergrupper og homomorfier. Læs eksemplerne hos Nicholson grundigt. Der er mange gode. Og lav følgende opgaver:
Lad $G$ og $H$ være grupper.

- Vis, at centeret $Z(G)$ er en normal undergruppe.
- Lad $\alpha : G \to H$ være en homomorfi. Vis, at kernen for $\alpha$ er en *normal* undergruppe af $G$.
- Lad $K$ være en normal undergruppe af $G$. Definer relationen $g_1 \sim_K g_2$ hvis der findes $k \in K$, så $kg_1 = g_2$. Vis, at $\sim_K$ er en ækvivalensrelation på $G$.
- 2.5.36

## Litteratur:

Til både torsdag og fredag: Nicholson. Kapitel 2.1 -2.5. pp. 66-103.

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST