Knuder, lænker og fletninger.

Regionalmøde Esbjerg 2012

Lisbeth Fajstrup
Aalborg Universitet

Hvorfor dette emne?

- Der er god matematik i knuder.
- Der er flotte billeder.
- Der er splinternye anvendelser i biologi/kemi.
- Gymnasieelever kan arbejde med knuder.

Hvad er en knude.

Dem, vi kender - på snørebånd og strikkegarn. Næsten da.

Definition - for jer, ikke eleverne.

En knude er en *lukket kurve uden selvgennemskæringer*:
En knude er billedet af $[0,1]$ under en kontinuert afbildning

$$K : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

med $K(0) = K(1)$ og $K(t_1) \neq K(t_2)$ ellers.

$$K : S^1 \to \mathbb{R}^3$$

kontinuert og injektiv - S^1 er cirklen.

En knude er *homeomorf* til en cirkel.

Hvad er en knude.

Dem, vi kender - på snørebånd og strikkegarn. Næsten da.

Definition - for jer, ikke eleverne.

En knude er en *lukket kurve uden selvgennemskæringer*:
En knude er billedet af $[0,1]$ under en kontinuert afbildning

$$K : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

med $K(0) = K(1)$ og $K(t_1) \neq K(t_2)$ ellers.

$$K : S^1 \to \mathbb{R}^3$$

kontinuert og injektiv - S^1 er cirklen.

En knude er *homeomorf* til en cirkel.

Hvad er en knude.

Dem, vi kender - på snørebånd og strikkegarn. Næsten da.

Definition - for jer, ikke eleverne.

En knude er en *lukket kurve uden selvgennemskæringer*:
En knude er billedet af $[0,1]$ under en kontinuert afbildning

$$K : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

med $K(0) = K(1)$ og $K(t_1) \neq K(t_2)$ ellers.

$$K : S^1 \to \mathbb{R}^3$$

kontinuert og injektiv - S^1 er cirklen.

En knude er *homeomorf* til en cirkel.

Hvad er en knude.

Dem, vi kender - på snørebånd og strikkegarn. Næsten da.

Definition - for jer, ikke eleverne.

En knude er en *lukket kurve uden selvgennemskæringer*:
En knude er billedet af $[0,1]$ under en kontinuert afbildning

$$K : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

med $K(0) = K(1)$ og $K(t_1) \neq K(t_2)$ ellers.

$$K : S^1 \to \mathbb{R}^3$$

kontinuert og injektiv - S^1 er cirklen.

En knude er *homeomorf* til en cirkel.

Hvor mange knuder findes der?

Hvornår er to knuder ens?
Når den ene kan deformeres over i den anden- uden at klippe i den.

Definition - ambient isotopi

To knuder K_1 og K_2 er ækvivalente, hvis der findes en *kontinuert familie af afbildninger*

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

så $F_0(x) = x$. (F_0 er identiteten.), $F_1(K_1) = K_2$ og F_t er en knude for ethvert t.
Kontinuert familie betyder

$$F : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$F(x,t) = F_t(x)$ er kontinuert.

Hvor mange knuder findes der?

Hvornår er to knuder ens?
Når den ene kan deformeres over i den anden- uden at klippe i den.

Definition - ambient isotopi

To knuder K_1 og K_2 er ækvivalente, hvis der findes en *kontinuert familie af afbildninger*

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

så $F_0(x) = x$. (F_0 er identiteten.), $F_1(K_1) = K_2$ og F_t er en knude for ethvert t.
Kontinuert familie betyder

$$F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

$F(x, t) = F_t(x)$ er kontinuert.

Hvor mange knuder findes der?

Hvornår er to knuder ens?
Når den ene kan deformeres over i den anden- uden at klippe i den.

Definition - ambient isotopi

To knuder K_1 og K_2 er ækvivalente, hvis der findes en *kontinuert familie af afbildninger*

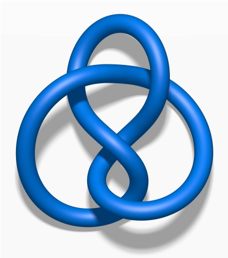
$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

så $F_0(x) = x$. (F_0 er identiteten.), $F_1(K_1) = K_2$ og F_t er en knude for ethvert t.
Kontinuert familie betyder

$$F : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

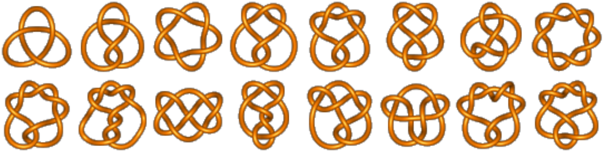
$F(x,t) = F_t(x)$ er kontinuert.

Billeder af knuder



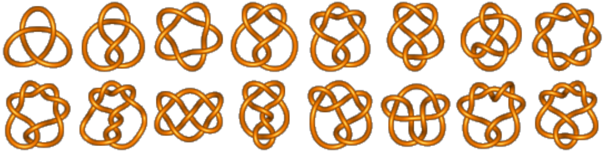
Trekløverknuden, “Trefoil”. Ottetalsknuden.

Flere knuder



De 16 *simpleste* knuder Billeder fra
`http://www.knotplot.com`
De er allesammen forskellige.
Simplest= færrest overkrydsninger.

Flere knuder

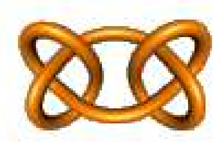


De 16 *simpleste* knuder Billeder fra
`http://www.knotplot.com`
De er allesammen forskellige.
Simplest= færrest overkrydsninger.

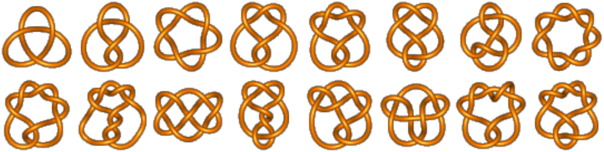
Knuder med givet antal overkrydsninger

- 1 med 3 overkrydsninger (trekløveret).
- 1 med 4 overkrydsninger (8-talsknuden)
- 2 med 5
- 3 med 6
- 7 med 7
- 21 med 8
- ... 12.965 med 13 eller færre
- 1.701.935 med 16 eller færre

Flere oversigter på nettet. Rolfsens atlas fra knude wiki



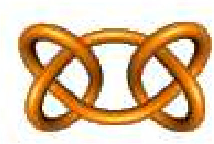
6 overkrydsninger.



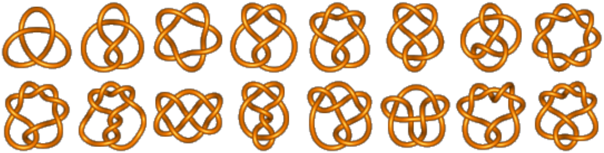
Billeder fra `http://www.knotplot.com`

Det er ikke med! Råbåndsknobet er ikke en *primknude*.

Hvad med et råbåndsknob?



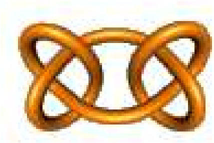
6 overkrydsninger.



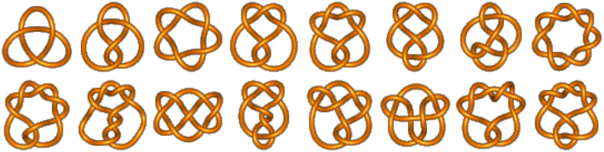
Billeder fra `http://www.knotplot.com`

Det er ikke med! Råbåndsknobet er ikke en *primknude*.

Hvad med et råbåndsknob?



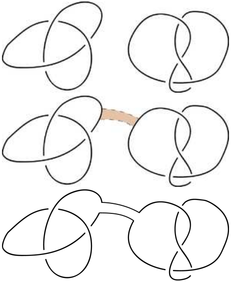
6 overkrydsninger.



Billeder fra `http://www.knotplot.com`

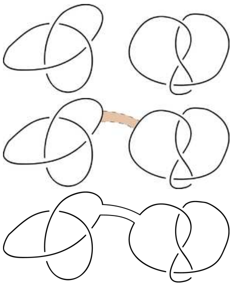
Det er ikke med! Råbåndsknobet er ikke en *primknude*.

Primknuder-”sum” af knuder



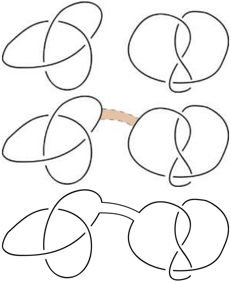
Billeder fra Wikipedia KnotSum. En primknude er en knude, der ikke er en sum af to ikke-trivielle knuder.

Primknuder-"sum" af knuder



Billeder fra Wikipedia KnotSum. En primknude er en knude, der ikke er en sum af to ikke-trivielle knuder.

Primknuder-"sum" af knuder



Billeder fra Wikipedia KnotSum. En primknude er en knude, der ikke er en sum af to ikke-trivielle knuder.

Klassifikation

Lav en tabel/en beskrivelse over alle primknuder med k overkrydsninger.

Problem: Antal overkrydsninger afhænger af, hvor man ser knuden fra.

Beskriv alle primknuder med k overkrydsninger i den projektion, det *knudediagram*, der har færrest.

Lav en tabel/en beskrivelse over alle primknuder med k overkrydsninger.
Problem: Antal overkrydsninger afhænger af, hvor man ser knuden fra.
Beskriv alle primknuder med k overkrydsninger i den projektion, det *knudediagram*, der har færrest.

Klassifikation

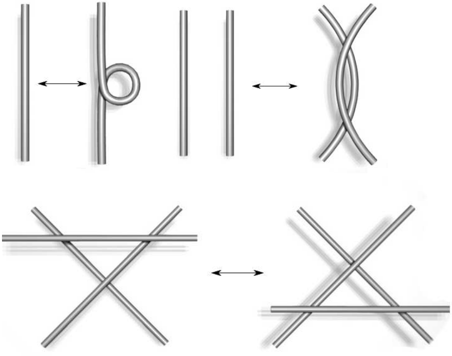
Lav en tabel/en beskrivelse over alle primknuder med k overkrydsninger.
Problem: Antal overkrydsninger afhænger af, hvor man ser knuden fra.
Beskriv alle primknuder med k overkrydsninger i den projektion, det *knudediagram*, der har færrest.

Hvordan ved man om to knudediagrammer er ens?

Klassifikation af knudediagrammer!
Perkoknuderne:

Blev betragtet som forskellige indtil 1974, hvor Kenneth Perko viste, de var ens.
Billeder fra KnotPlot `http://www.knotplot.com`

To knudediagrammer er ækvivalente (svarer til samme knude), hvis og kun hvis de kan bringes over i hinanden under Reidemeistermoves:



Type I, Type II og Type III
Billede fra Wikipedia om Reidemeistermoves

Invarianter - hvordan ser man, to diagrammer *ikke* er fra samme knude?

Ønskes: Tal (eller algebraisk objekt - gruppe, ring,...), som

- Kan regnes ud for et givet knudediagram
- Giver det samme for diagrammer, der svarer til samme knude
- Skelner så godt som muligt...

Konsekvens:

To knude diagrammer er forskellige, hvis de har forskellig invariant.

Hvordan ved man, om man har en invariant?

Husk: To diagrammer er ækvivalente *hvis og kun hvis* de kan flyttes over i hinanden under Reidemeistermoves.
Konsekvens: Hvis et tal er invariant under de tre Reidemeistermoves, så er det en invariant.

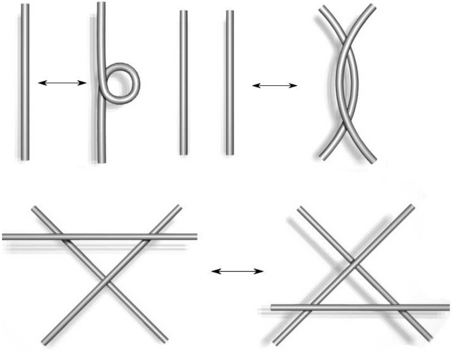
Eksempler på knudeinvarianter: Trefarvet

Et knudediagram er trefarvet, hvis man kan farve med højst tre farver og

- Mindst to farver skal bruges.
- Ved en overkrydsning er de tre kanter, der mødes, enten samme farve eller tre forskellige farver.

Ottetalsknuden kan ikke trefarves
Men trekløverknuden kan, så de er ikke ækvivalente.

Trefarvning er en invariant



Vises for hvert Reidemeistermove.
Billede fra Wikipedia om Reidemeistermoves

Trefarvning

Den trivielle knude kan ikke trefarves, så trefarvede knudediagrammer er ikke den trivielle knude.

Trefarvning skelner ikke godt. Der er kun to muligheder: Trefarvet eller ikke trefarvet.

Trefarvning

Den trivielle knude kan ikke trefarves, så trefarvede knudediagrammer er ikke den trivielle knude.
Trefarvning skelner ikke godt. Der er kun to muligheder: Trefarvet eller ikke trefarvet.

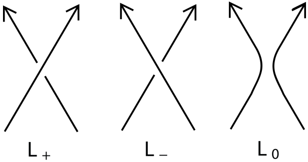
Andre invarianter

Polynomier:

- Alexanderpolynomiet 1923
- Jones polynomiet 1980
- HOMFLY 1985

Givet ved iterativt at “pille knuden fra hinanden”. Kodeord - Skein relations.

Jones polynomiet



Jones polynomiet $V()$ opfylder $V(''uknuden'') = 1$ og

$$(t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0) = t^{-1}V(L_+) - tV(L_-)$$

En udregning af Jonespolynomiet

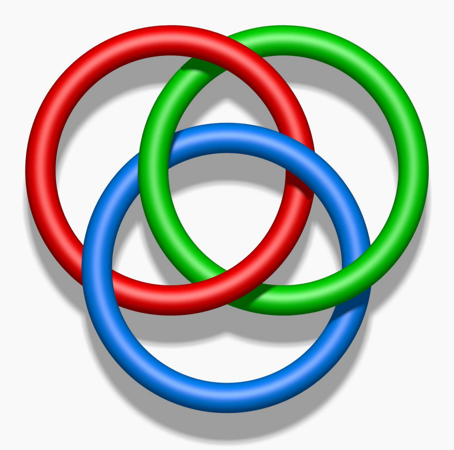
Jones polynomiet for trekløverknuden.
`http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-knots5`

Pindetal/sticknumber

Knuder, som er linjer bortset fra nogle knækpunkter.
Hvor mange knæk skal man have for at lave en ikke-triviel knude?
Svar: 6
Hvor mange skal man bruge for at lave eksempelvis Perkoknuden?
Ikke udregneligt fra knudediagrammerne, men en invariant - hvis man skal bruge 10 pinde for at lave K_1 og 12 for K_2, så er de ikke ækvivalente.

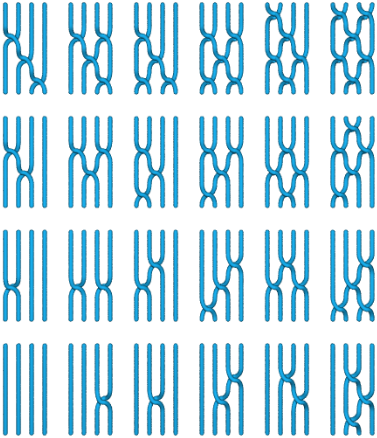
$$s(K_1 + K_2) \leq s(K_1) + s(K_2) + 1$$

Lænker og fletninger



Lænker - Borromeoringene (efter en Borromeofamiliens barokpalads på Isola Bella i Lago Maggiore). De olympiske ringe!
Flere knuder "hægtet/lænket sammen" med hinanden.

Fletninger



Fra Wikipedia

Fletninger med n strenge udgør en gruppe - de kan sættes i forlængelse af hinanden.
Et-element: Ingen overkrydsninger
Invers: Overkrydsninger “tilbage igen”.

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \rangle,$$

Ethvert link og dermed enhver knude kommer fra en fletning, hvis ender er “syet sammen”.

Proteiner slår knuder

Se mere på Power Point slides.

Lisbeth Fajstrup
Institut for Matematiske Fag
Fredrik Bajers Vej 7G2-117
fajstrup@ math.aau.dk
http://people.math.aau.dk/~fajstrup
http://numb3rs.math.aau.dk/