

Kortprojektioner og forvanskninger

Lisbeth Fajstrup
Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Juni 2006

Chapter 1

Forord

Disse noter er skrevet til landinspektørstudiet ved Aalborg Universitet. Formålet med noterne er at give en introduktion til teorien for kortprojektioner og egenskaber ved forskellige kort.

I kapitel 2 gives en kort repetition af nogle begreber fra calculus, som forudsættes kendt. Kapitel 3 er begrundelsen for, at en diskussion af kortprojektioner og deres egenskaber er nødvendig, nemlig at der ikke findes ideelle kort. Studiet af projektioner med calculus-værktøj kræver koordinater på modeller af Jorden. De indføres i kapitel 4. Nogle projektioner har en geometrisk beskrivelse, og det er den, kapitel 5 handler om.

Målestoksforholdet for en projektion er ikke en konstant, men en funktion, der afhænger af både sted og retning. Et værktøj til udregning af såvel målestok som forvanskninger af vinkler og arealer er Første Fundamentalform. Dette behandles i kapitlerne 6 og 7.

I kapitel 8 konstrueres vinkeltro og arealtro projektioner, herunder den vinkelbevarende cylinderprojektion, Mercatorprojektion.

Kapitel 9 om konstruktion af konforme kort med minimal målestoksforhold er mestendels henvisning til opgaver, som stilles i kurset. Endelig er kapitel 10 en udledning af afstandskorrektionen for System 1934.

I kurset bruges disse noter sammen med anden litteratur, og der er således ikke tale om, at noterne giver en komplet fremstilling af teorien for kortprojektioner.

Chapter 2

Forudsætninger

I noterne bruges regneregler og begreber fra teorien for vektorrum. Vi giver en kort repetition af nogen af de relevante emner.

Definition 2.0.1 *En vektorfunktion er en afbildning fra en delmængde af et Euklidisk rum til et Euklidisk rum*

$$\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

hvor $U \subseteq \mathbb{R}^m$ Vektorfunktioner er givet ved deres koordinatfunktioner f_i :

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

Eksempel 2.0.2 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$$

I det følgende vil de vektorfunktioner, der forekommer, være vilkårligt ofte *differentiable* (se definition i Calculusmaterialet fra basisuddannelsen) og vi vil få brug for at udregne partielle afledte. Vi giver definitionen for funktioner fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^3 - det er let at se, hvordan man generaliserer det.

Definition 2.0.3 *Lad $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en differentiable funktion. Den partielle afledte, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{f}_x(x_0, y_0)$ er givet ved*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x_0 + h, y_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + h, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x_0 + h, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(x_0 + h, y_0) - f_3(x_0, y_0)}{h} \end{pmatrix}$$

Partielle afledte mht. y defineres tilsvarende.

Man udregner partielle afledte med hensyn til en given variabel ved at betragte de andre variable som konstante. De partielle afledte af en vektorfunktion er vektorfunktioner: Hvis $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, så er $\mathbf{f}_{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Eksempel 2.0.4 Lad $\mathbf{f}(x, y) = (x^2y + \cos x, y \exp(x), x + y)$. Så er $\mathbf{f}_x(x, y) = (2xy - \sin x, y \exp(x), 1)$ og $\mathbf{f}_y(x, y) = (x^2, \exp(x), 1)$

Når vi ønsker at beskrive en kurve i \mathbb{R}^n , kan vi f.eks. bruge en parameterfremstilling. Her gives definitioner for kurver i \mathbb{R}^3 , og det er overladt til læseren at overveje, hvordan det ser ud generelt for \mathbb{R}^n .

Definition 2.0.5 En parametriseret kurve i \mathbb{R}^3 er en vilkårligt ofte differentiable afbildning $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$.

Kurvens hastighedsvektor til tiden t , er $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t))$

Farten til tiden t , er længden af hastighedsvektoren

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + (\alpha'_3(t))^2}.$$

Afstanden langs kurven fra $\alpha(t_0)$ til $\alpha(t_1)$ er

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$$

Vi får brug for kurver i \mathbb{R}^2 og \mathbb{R}^3 i det følgende. Desuden skal vi bruge *kædereglens*, som vi her giver i et eksempel:

Eksempel 2.0.6 Lad $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ og lad funktionen $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$. Så er den sammensatte funktion $\mathbf{x} \circ \gamma$ en funktion af én variabel, t , og den afledte er

$$(\mathbf{x} \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t)$$

Bemærk, at $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(t), v(t))$ er en vektor, mens $\frac{du}{dt}(t)$ er et tal.

Der vil være flere dele af såvel Calculus som lineær algebra, som kommer i brug. Læseren opfordres til at konsultere kursuslitteraturen fra basisuddannelsen, når det bliver nødvendigt.

Chapter 3

Om kort

Et kort er en model af en del af Jordens overflade. En model er en forsimplet udgave af virkeligheden, og når man laver modeller, skal man derfor overveje, hvilke egenskaber, i.e., hvilke dele af virkeligheden, man ønsker repræsenteret i modellen, og hvor præcist dette skal og kan lade sig gøre.

Blader man rundt i et atlas, vil man se, at der er mange forskellige måder, man kan bruge til kortlægning. Verdenskort ser f.eks. meget forskellige ud alt efter hvilken *kortprojektion*, man har *valgt*. Selv kort over et så relativt lille område som Danmark kan give mange billeder af landet, se Fig. 3.1

Man fristes til at spørge, hvilket kort der er bedst? Og hvorfor man så ikke bare altid bruger det kort?

Der er nogle grundlæggende problemer ved at repræsentere den runde Jord i planen, som man skal gøre sig klart for at forstå de mange forskellige kort. Det kedelige faktum er, at der ikke er ét kort, der er “det bedste kort”. Man kan højst håbe på at finde et, der er bedst til det, man har tænkt sig at anvende kortet til.

For at undersøge det problem nærmere, vil vi se på de geometriske egenskaber ved kuglefladen. Jorden er naturligvis ikke en kugleflade - den er nærmere en ellipsoide, og selv det er en tilnærmelse¹. Vi ser nærmere på forskellige modeller for hele Jorden senere; de kvalitative betragtninger om kort vil tage udgangspunkt i kuglefladen, hvor såvel de væsentlige problemer som de moderne kort kan gives en udmærket beskrivelse. Det kræver så en modifikation at overføre resultaterne fra kuglefladen til ellipsoidemodellerne senere.

¹Tænk bare på Mount Everest. Det er ikke med, hvis vi vælger en ellipsoide som model for Jorden.

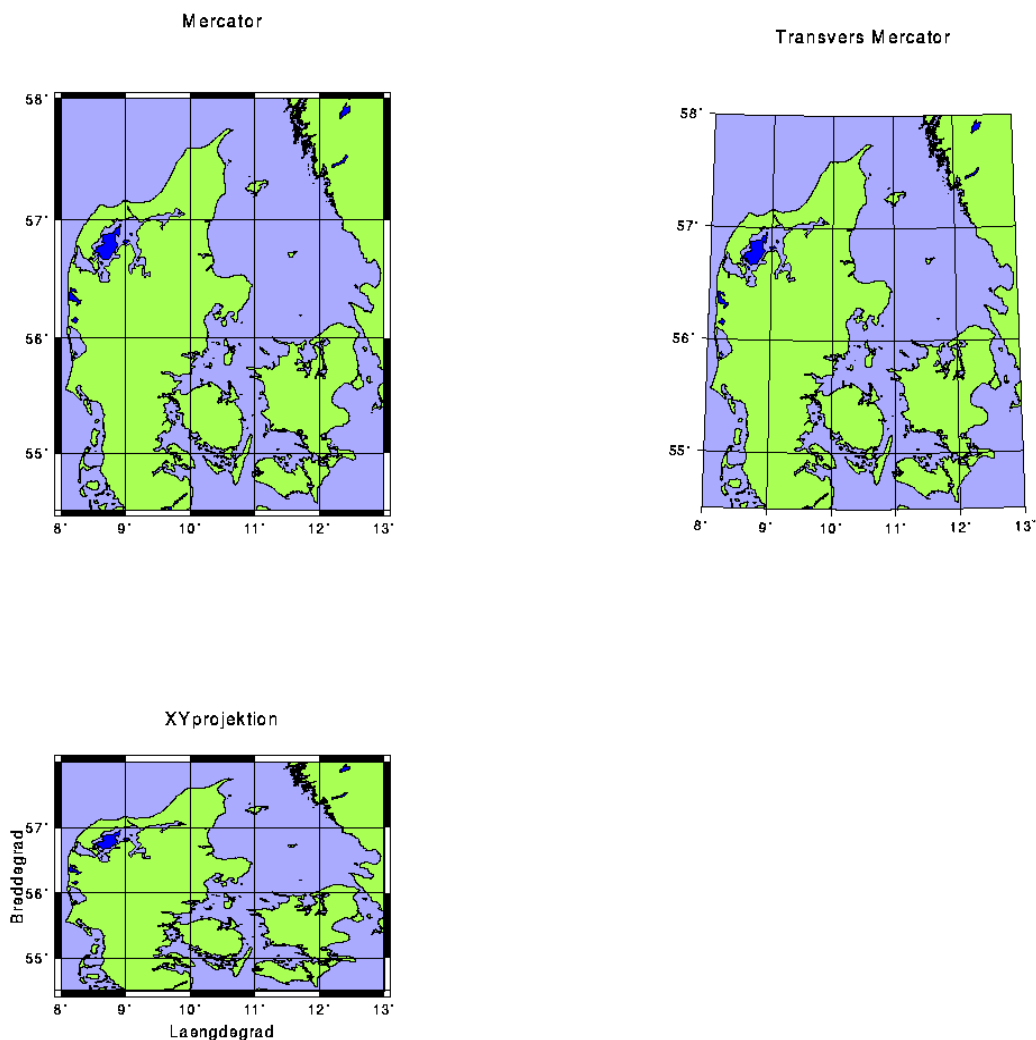


Figure 3.1: Forskellige kort over Danmark

3.1 Kuglefladens geometri

I skolen viser man, at vinkelsummen i en plan trekant er π eller 180° . Her vil vi udregne vinkelsummen i en trekant på kuglefladen og dermed illustrere en fundamental forskel på kuglefladens og planens geometri.

Det kan anbefales, at man læser dette afsnit med en bold (eller en appelsin eller noget andet kuglerundt) i hånden. Brug bolden (!) som tavle til at tegne cirkler, trekanter etc. Det gør det lettere at forestille sig geometrien af kuglefladen.

Først skal vi overveje, hvad en trekant på kuglefladen er. Der er ikke linier på en kugleflade - alle kurver på en kugleflade må nødvendigvis krumme for

at holde sig i kuglefladen. De kurver, der bedst svarer til linier er *storcirkler*

En storcirkel er en kurve, der fremkommer ved skæring af kuglefladen med en plan gennem kuglefladens centrum.

- Ækvator er en storcirkel.
- Storcirkler er de største cirkler på kuglefladen.
- Den korteste forbindelse mellem to punkter på kuglefladen er langs en storcirkel.
- Gennem to antipodiske punkter, for eksempel Nord- og Sydpolen, går der uendeligt mange storcirkler.
- Gennem to punkter, der ikke er antipodiske, går der kun en storcirkel.

En trekant på kuglefladen, en *sfærisk trekant* dannes af tre punkter, som er parvis forbundet ved storcirkelstykker. Se fig. 3.2

Vinklen mellem to kurver er vinklen mellem deres tangentvektorer. Da tangentvektorer til en storcirkel er vektorer i den plan, der definerer storcirklen, er vinklen mellem to storcirkler samtidig vinklen mellem de to planer. Vi regner som hovedregel vinkler i radianer her:

Faktum: På en kugleflade med radius R , er vinkelsummen i en sfærisk trekant med areal A , givet ved

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$$

Argument for dette:

Se på en af vinklerne, α , og de to storcirkler, der danner den. I figur 3.3 er arealet mellem to sådanne storcirkler skraveret.

Da arealet af en kugleflade med radius R er $4\pi R^2$, og da en dobbeltmåne med vinkel π vil dække hele kuglen, får vi:

- Arealet af en dobbeltmåne med vinkel α er

$$\frac{\alpha}{\pi} 4\pi R^2 = 4\alpha R^2$$

Skraver nu de tre dobbeltmåner, der hører til de tre vinkler i trekanten (gør det på bolden), Nu er hele kuglefladen dækket, og trekanten er dækket tre gange (den er i alle dobbeltmånerne), så den er dækket to gange for meget. Og det er trekanten på bagsiden af kuglen også Heraf:

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + 4A$$

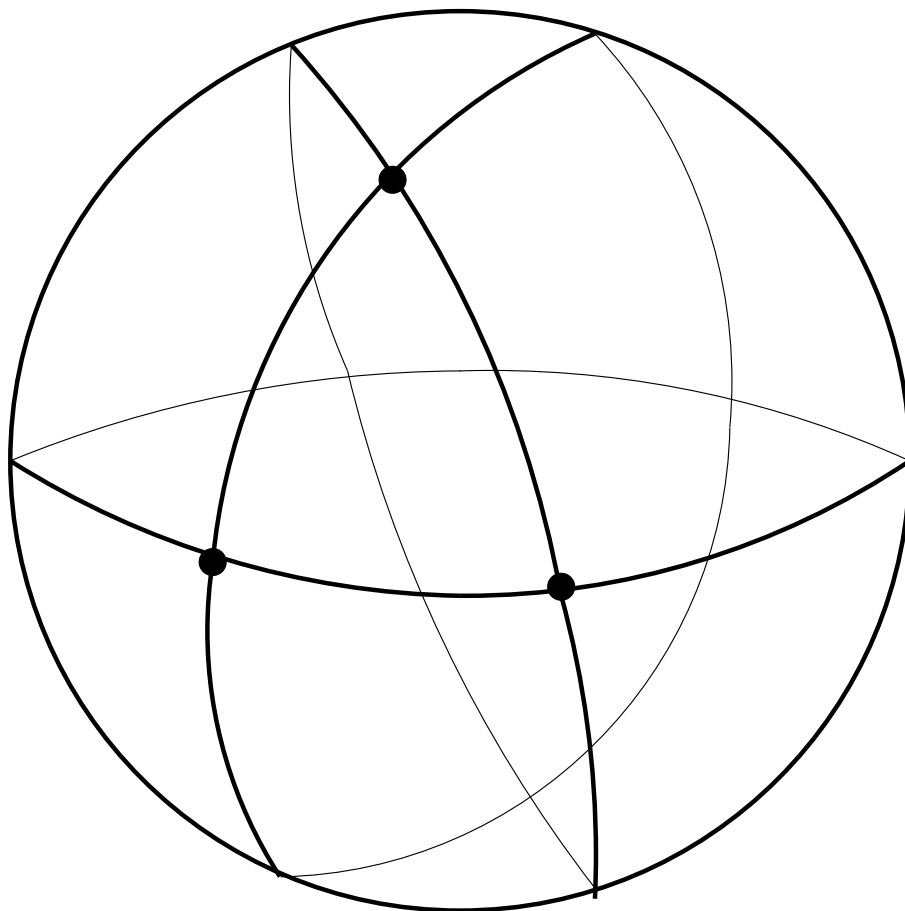


Figure 3.2: En sfærisk trekant og de storcirkler, der danner den. Bemærk, at storcirklerne mødes på bagsiden af kuglen og danner endnu en trekant.

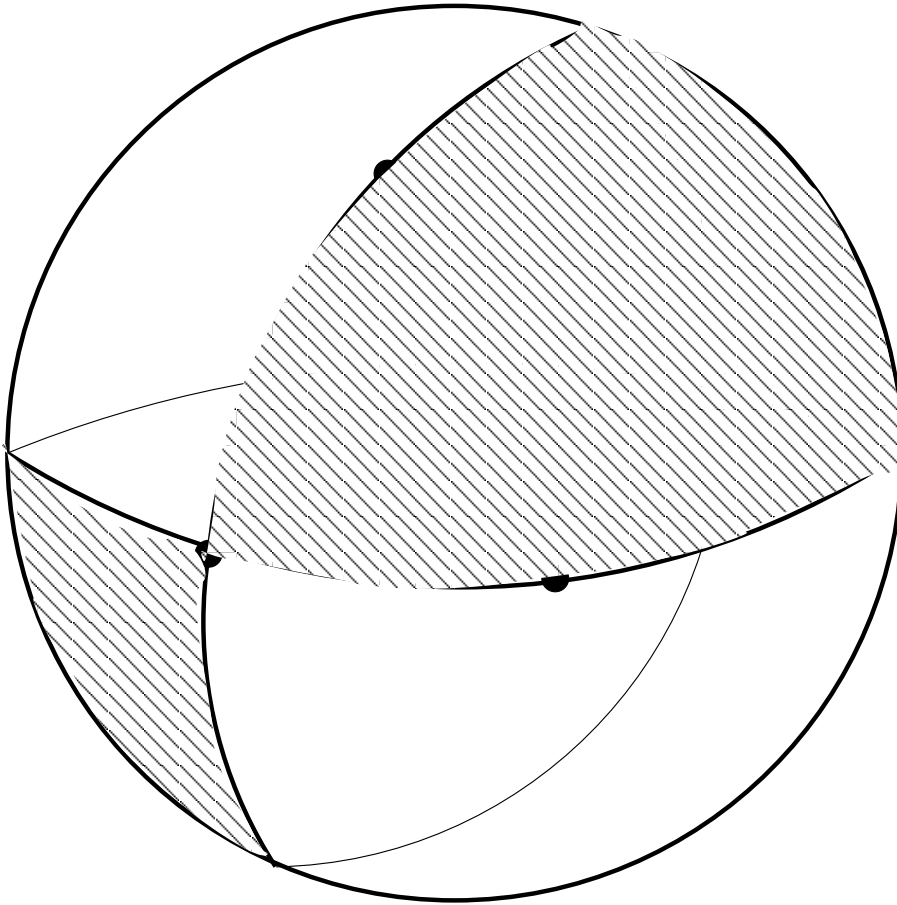


Figure 3.3: En dobbeltmåne mellem to storcirkler - kun forsiden er skraveret

hvor A er trekantens areal. Og heraf følger resultatet om vinkelsummen.

3.2 Ideelle projektioner findes ikke

Fra forrige afsnit ved vi, at kuglefladens geometri er fundamentalt forskellig fra planens, idet vinkelsummen i trekanter på kuglefladen som på Fig. 3.4 adskiller sig fra vinkelsummen i en trekant i planen:

På en kugleflade med radius R er vinkelsummen i en storcirkeltrekant med vinkler α , β og γ målt i radianer givet ved:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2} \quad (3.1)$$

hvor A er arealet af trekanten. Størrelsen $\frac{A}{R^2}$ kaldes sfærisk excess. Man kan vise, at trekanter på en ellipsoide opfylder lignende omend mere komplicerede formler, men der er vinkelsummen også “for stor”.

I planen er vinkelsummen som bekendt π , og altså uafhængig af arealet af trekanten.

Hvad skal et ideelt kort opfylde? Grundlæggende skal man kunne måle størrelser på kortet og nemt regne ud, hvad de tilsvarende størrelser er i naturen og omvendt. De størrelser, man gerne vil måle, kunne f.eks. være afstande/længder, vinkler og arealer. Det er de tre vigtigste geometriske størrelser, og det er også det, man i praksis kan forestille sig at ville måle.

Et ideelt kort bør således være

1. Afstandstro: Have en fast faktor m , så “længde i kortet” = $m \cdot$ “længde i naturen”.
2. Arealtro: Have en fast faktor k , så “areal i kortet” = $k \cdot$ “areal i naturen”.
3. Vinkeltro: Vinkler i kortet = Vinkler i naturen. Vinkeltro kort kaldes også konforme.

Når man måler afstanden mellem to punkter i planen, måles den langs linien mellem punkterne. På kuglefladen er det afstanden langs en storcirkel, der er aktuel. Storcirklerne er de kurver på kuglefladen, der svarer til kortest afstand mellem punkterne på dem.² Dette leder til endnu et krav til det ideelle kort, som skal sikre, at man måler det samme i planen og i naturen:

4) Storcirkelstykker skal afbildes i rette liniestykker.

²Hvis man går den rigtige vej rundt.

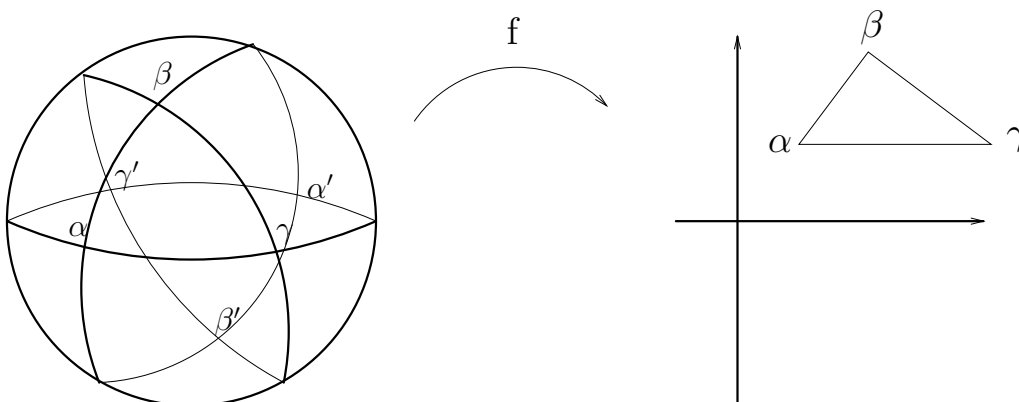


Figure 3.4: Trekanter på kuglen og i planen.

(Faktisk kan man vise, at dette følger af 1), men det vil vi ikke gøre her.) Men

Sætning 3.2.1 *Der findes ikke en afbildning fra en åben³ delmængde U af kuglefladen S^2 til planen, som sender storcirkelstykker i liniestykker og som bevarer vinkler.*

Bevis: Antag, at vi har en sådan afbildning fra $U \subset S^2$ til \mathbb{R}^2 , som i Fig. 3.4. Lad α, β, γ være vinkler i en storcirkeltrekant, som ligger i U . Den bliver sendt over i en sædvanlig trekant i planen, da storcirkelstykkerne går i liniestykker. Hvis vinklerne er bevaret, har vi fra den sfæriske trekant, at $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$. Men vinklerne i den plane trekant er de samme, så vi har også $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, og det kan jo ikke passe - ligemeget hvor lille en trekant, vi har valgt. Vi har opnået en *modstrid*. Altså findes en sådan afbildning ikke. \square

Det er altså ikke muligt at lave en ideel projektion. Faktisk kan man vise:

- Der findes ikke en afbildning fra en åben delmængde af S^2 til planen, som er afstandstro.
- Der findes ikke en afbildning fra en åben delmængde af S^2 til planen, som bevarer *både* vinkler *og* arealer.

Men man kan lave projektioner, der bevarer arealer. Og andre projektioner, der bevarer vinkler.

Det samme gælder for afbildninger fra en ellipsoide til planen.

³Vi skal bare bruge, at der er en (lillebitte) storcirkeltrekant indeholdt i U , så U må f.eks. ikke være en kurve på kuglefladen.

Chapter 4

Geografiske koordinater

I en matematisk behandling af kortprojektioner er det nødvendigt med en analytisk beskrivelse af afbildninger fra kuglefladen til planen. Til det formål har vi brug for et koordinatsystem på kuglefladen, og vi vil bruge *geografiske koordinater*, længdegrader og breddegrader.

Breddegraden φ til et punkt P på kuglefladen, er vinklen mellem ækvatorplanet og en linie fra centrum af kuglen til P . Se Figurerne 4.1 og 4.3

Længdegrader måles ud fra Greenwichmeridianen. *Meridianer* er storcirkelbuer fra Nordpolen til Sydpolen. De fremkommer som snittet af kuglefladen med en plan, der indeholder Nord- og Sydpolen. Man har fastlagt nulmeridianen som den, der går gennem et bestemt punkt ved Greenwichobservatoriet i London. Længdegraden λ for P er vinklen mellem den meridian, der går gennem P , og Greenwichmeridianen.

Punkter med samme breddegrad danner en cirkel parallel med ækvatorplanet. Sådanne cirkler kaldes *parallel* eller *breddecirkler*. Bemærk, at den eneste breddecirkel, der er en storcirkel, er Ækvator.

Længdegrader opgives typisk som en vinkel mellem 0° og 180° , med angivelse af, om det er østlig eller vestlig længde - i.e., om der skal gås mod øst eller vest fra Greenwich. Vi vil i stedet bruge $\lambda \in [-180^\circ, 180^\circ]$, hvor negative vinkler er vestlig længde, eller $\lambda \in [-\pi, \pi]$, hvor vinklen er målt i radianer.

Tilsvarende opgives breddegrader som Nordlig eller Sydlig bredde og med en vinkel mellem 0° og 90° . Vi bruger $\varphi \in [-90^\circ, 90^\circ]$, hvor negative vinkler er sydlig bredde, eller $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

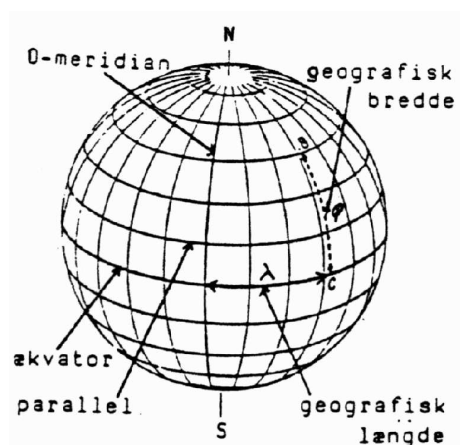


Figure 4.1: Geografiske koordinater

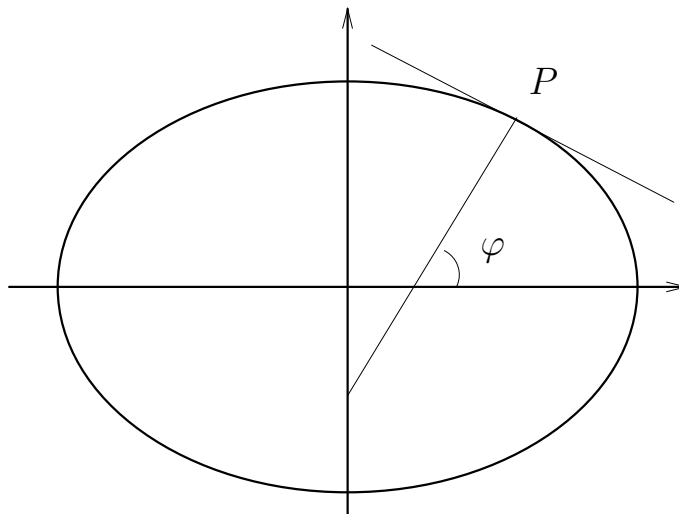


Figure 4.2: Breddegrader på ellipsoider

4.0.1 Ellipsoider og geografiske koordinater

Et punkt på en ellipsoide kan også tildeles geografiske koordinater. Længdegraden bestemmes som for kuglefladen. Men breddegraden er vinklen mellem lodlinien og ækvatorplanet. Se Fig. 4.2

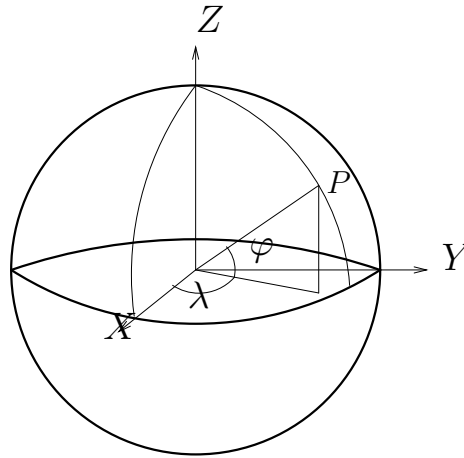


Figure 4.3: Kuglefladens geografiske koordinater

4.1 Fra geografiske koordinater til kartesiske koordinater

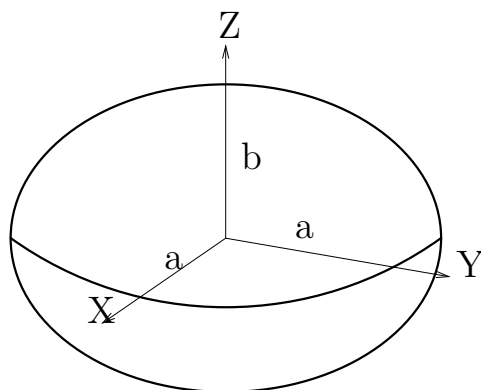
Anbringes kuglefladen med centrum i Origo i et sædvanligt kartesisk¹ koordinatsystem, hvor x -aksen peger ud gennem Greenwichmeridianen og z -aksen peger op gennem Nordpolen, så er punkter på kuglen naturligvis bestemt ved deres kartesiske koordinater.

Ved trekantsbetragtninger ser man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

hvor R er radius af kuglefladen. Den tænksomme læser vil have bemærket, at Nord- og Sydpolen samt datolinien ikke er entydigt repræsenteret i de geografiske koordinater. Det vil vi ikke problematisere yderligere, men man skal naturligvis overveje, om det giver problemer, hvis man senere arbejder med disse områder.

¹Et retvinklet koordinatsystem - ordet kartesisk kommer fra René Descartes, 31/3 1596-11/2 1650

Figure 4.4: Omdrejningseelipsoide med halvaksler a og b

4.2 Omdrejningsellipsoider

En omdrejningsellipsoide med halvaksler a og b , se Fig. 4.4 kan beskrives analytisk som den delmængde af \mathbb{R}^3 , der opfylder ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

De geografiske koordinater for et punkt kan omskrives til kartesiske koordinater:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cdot \cos \varphi \sin \lambda \\ N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Hvor

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

er *excentriciteten*

og

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

er *krumningsradius* i punktet. I stedet for at opgive a og b , bruger man ofte a og *fladtrykningen* $f = \frac{a-b}{a}$. For modeller af Jorden er fladtrykningen omkring $1/297$.

Chapter 5

Kortprojektioner fra en geometrisk synsvinkel

De geografiske koordinater giver nu mulighed for at beskrive en kortprojektion som en afbildning

$$\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{f}(\lambda, \varphi) = (f_1(\lambda, \varphi), f_2(\lambda, \varphi))$$

hvor U er en delmængde af $\{(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq \lambda \leq \pi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$

Nu er der altså masser af muligheder: Man skal bare vælge sig nogle (differentiable) funktioner f_1 og f_2 . Hvis det skal give mening som et kort, må vi forlange, at \mathbf{f} er injektiv: Hvis $\mathbf{f}(\lambda_1, \varphi_1) = \mathbf{f}(\lambda_2, \varphi_2)$, så skal $(\lambda_1, \varphi_1) = (\lambda_2, \varphi_2)$

Men stadig er der mange muligheder. Nogle kan beskrives geometrisk, og det er det synspunkt, vi vil anlægge i dette kapitel.

5.1 Geometriske planprojektioner

Denne familie af projektioner er givet ved, at man anbringer projektionsplanen et sted i \mathbb{R}^3 , typisk tangerende eller skærende kuglefladen. Dernæst vælges et punkt, Q_0 i rummet. Projektionerne beskrives så ved “ P afbildes over i det punkt, hvor linien gennem P og Q_0 skærer projektionsplanen.”

I det følgende antages kuglefladen at have radius 1. Vi studerer de tre projektioner vist i fig. 5.1

Eksempel 5.1.1 *Lad projektionsplanen være givet ved $z = 1$ og lad projektionspunktet være Origo. En linie gennem $P = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)$ og Origo*

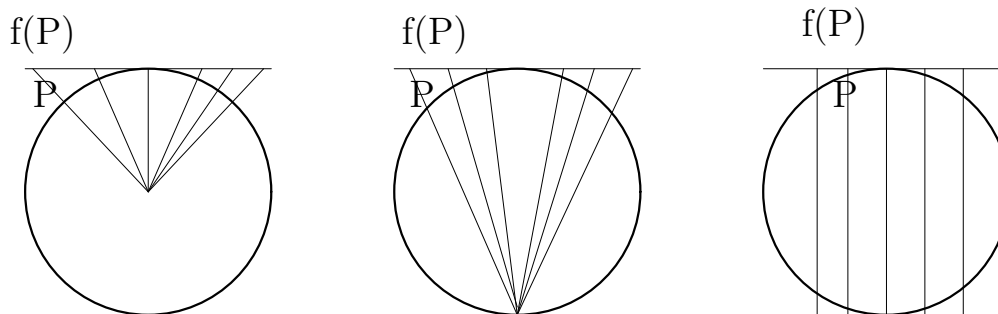


Figure 5.1: Planprojektioner: Gnomonisk, stereografisk og ortografisk.

kan parameterfremstilles som

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda - 0 \\ \cos \varphi \sin \lambda - 0 \\ \sin \varphi - 0 \end{pmatrix}$$

Skæring med planen $z = 1$ sker, når $1 = t \sin \varphi$, altså $t = 1/\sin \varphi$, og dermed er projektionen givet på analytisk form ved

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cos \lambda, \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin \lambda \right) = \cot \varphi (\cos \lambda, \sin \lambda)$$

Denne projektion kaldes den gnomoniske planprojektion.

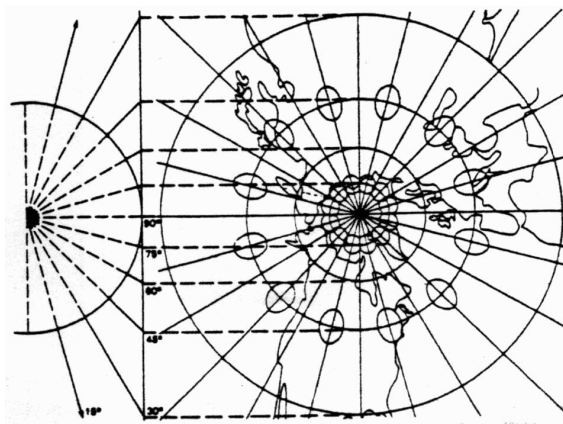


Figure 5.2: Kort med den gnomoniske azimutalprojektion

Den bevarer hverken vinkler eller arealer, men den afbilder storcirkelstykker i rette linier. Overvej, hvor stor en del af Jorden, man kan få med på èt kort.

Stereografisk projektion.

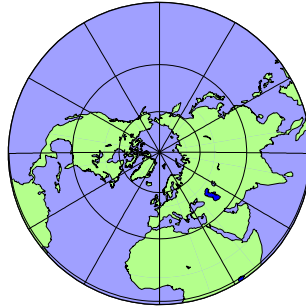


Figure 5.3: Stereografisk projektion

Eksempel 5.1.2 Lad projektionsplanen være planen givet ved $z = 1$ og lad projektionspunktet være Sydpolen, $(0, 0, -1)$. Den projektion, der fremkommer ved ovenstående opskrift, er Stereografisk projektion, se fig. 5.1.2 Den er givet ved

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow \left(2 \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \cos \lambda, 2 \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \sin \lambda \right) = 2 \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} (\cos \lambda, \sin \lambda)$$

Stereografisk projektion bevarer vinkler. Det skal vi se senere.

Eksempel 5.1.3 Ortografisk planprojektion. Her lader man projektionspunktet være uendelig langt væk - eller rettere: Man projicerer vinkelret ned på projektionsplanen $z = 1$. Det giver

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda) = \cos \varphi (\cos \lambda, \sin \lambda)$$

5.2 Geometriske cylinderprojektioner

Her forestiller man sig, at projektionsplanen er rullet sammen til en cylinder, som tangerer kuglefladen i Ækvator. Så projektionen består geometrisk af to skridt: Projicer på cylinderen og klip derefter denne op og rul den ud til en plan. Det ordner vi på en gang, på følgende måde: Et punkt på cylinderen har to koordinater: En længdegrad, u og en højde over $x - y$ -planen, v som på fig. 5.6. Det er så de samme koordinater, vi bruger i planen:

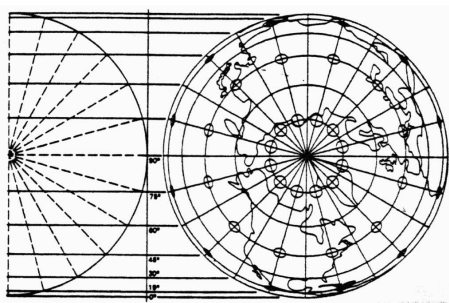


Figure 5.4: Kort med den ortografiske azimutalprojektion

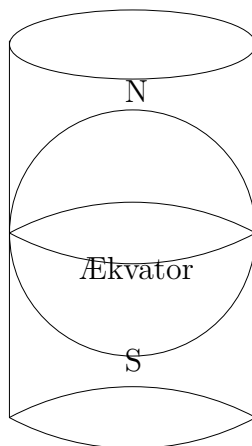


Figure 5.5: Geometriske cylinderprojektioner

Eksempel 5.2.1 Archimedes' arealbevarende cylinderprojektion. (*Kaldes ofte Lambert's projektion, men Archimedes var nu først*). Et punkt på kuglen afbildes vandret ud på cylinderen. Med andre ord: Træk en halvlinje, fra z -aksen gennem P , parallelt med $x - y$ planen og find dens skæringspunkt med cylinderen. Det analytiske udtryk er

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \sin \varphi)$$

Projektionen er arealbevarende.

Eksempel 5.2.2 Centralcylindrisk projektion. Her vælger vi *Origo* som projek-tionspunkt. Vi ser altså på halvlinjen fra *Origo* gennem P . Det analytiske udtryk for projektionen bliver

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \tan(\varphi))$$

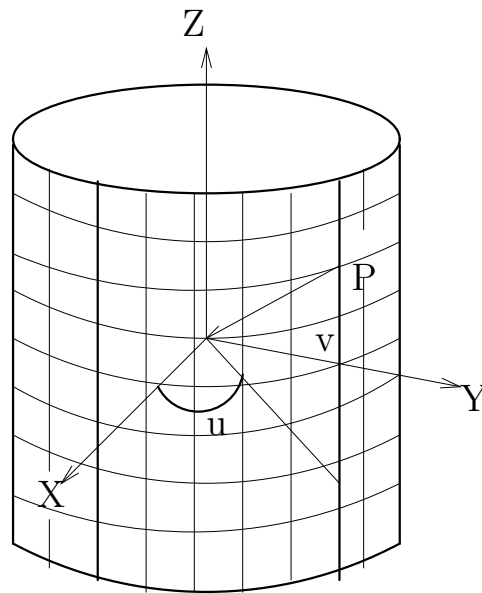


Figure 5.6: Koordinater på cylinderen

5.3 Kegleprojektioner

En tredje familie af geometriske projektioner er kegleprojektionerne. Her er projektionsplanen foldet til en kegle, som placeres på toppen af kuglefladen. Disse projektioner vil ikke blive behandlet nærmere i noterne her. Deres analytiske form ligner planprojektionerne:

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow h(\varphi)(\cos(a\lambda), \sin(a\lambda))$$

Hvor $0 \leq a \leq 1$. Geometrisk afhænger a af, hvor stor en åbningsvinkel, keglen har.

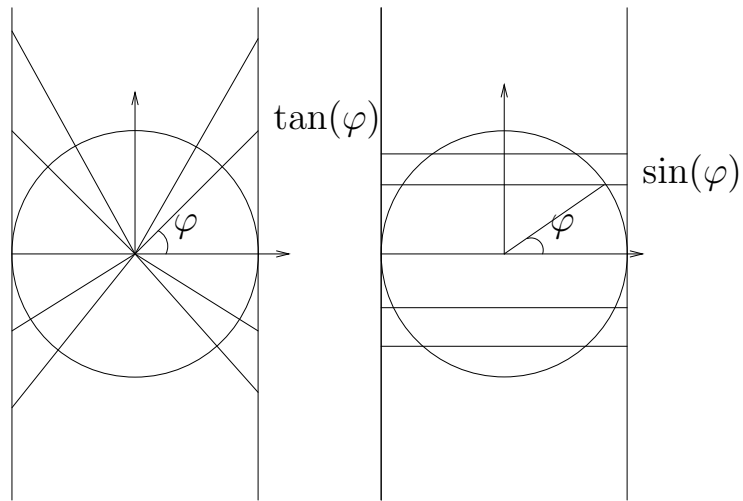


Figure 5.7: Geometriske cylinderprojektioner. Centralcylindrisk og Archimedes' projektion.

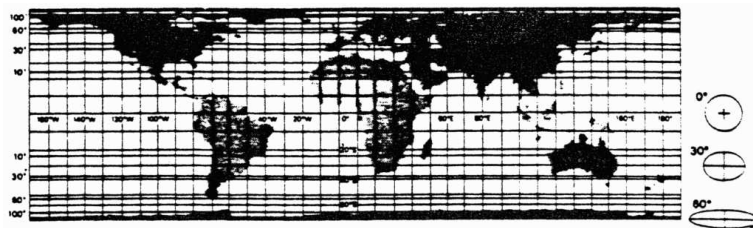


Figure 5.8: Archimedes' arealtro cylinderprojektion

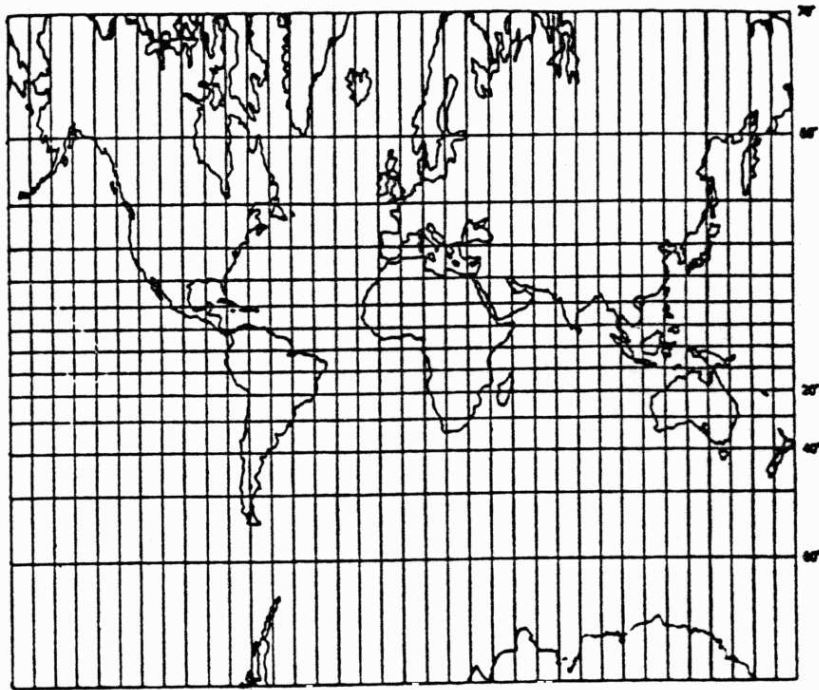


Figure 5.9: Kort med den centralcyklindriske projektion

Chapter 6

Målforshold

Målforsholdet for en kortprojektion skal give relationer mellem *længder* i naturen og *længder* på kortet. Mere præcist ønsker vi at kunne udtrykke sammenhængen mellem *længder af kurver* på kuglefladen eller ellipsoiden, kaldet datumfladen, og længder af kurver i kortet. Lad $\gamma :]a, b[\rightarrow S$ være en kurve på datumfladen og lad $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en kortprojektion, se fig. 6.1. Forholdet mellem længden af kurven efter og før projektion, er

$$m(\gamma) = \frac{\int_a^b |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_a^b |\gamma'(s)| ds}$$

Der er altså et tal, der udtrykker forholdet mellem de to kurvelængder. Det bliver imidlertid ganske uoverskueligt at have et målforshold for hver kurve, og det kan da også systematiseres. Deler man kurven op i små stykker, vil hvert lille stykke blive strakt med en faktor, og disse er forskellige. Faktisk sker der en strækning i hvert punkt og enhver retning. Se f.eks. Archimedes' projektion, Figur 5.8; det er tydeligt, at strækning langs breddecirkler tæt på Nordpolen er større end langs Ækvator og end strækning langs en meridian.

Lad P være et punkt på kurven, $P = \gamma(t_0)$. målforsholdet i P langs γ er

$$m(P, \gamma) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds}$$

I denne grænseovergang går både tæller og nævner mod 0, og for sådanne grænseovergange gælder L'Hôpital's regel (Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital, 1661-

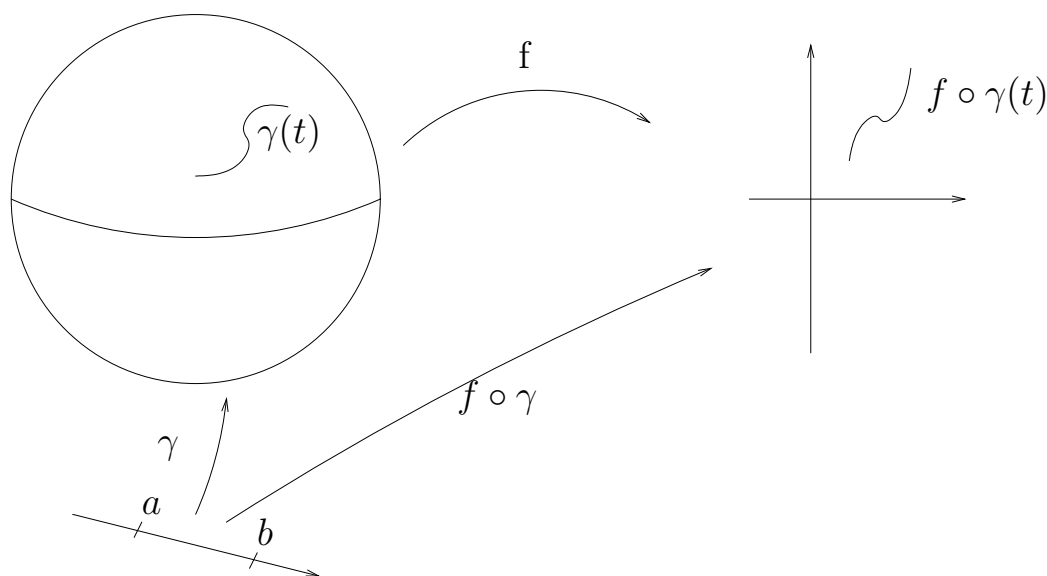


Figure 6.1: En kurve før og efter projektion.

1704), som her siger, at

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds}$$

Dette kan man regne ud til

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{|\gamma'(t)|} = \frac{|(f \circ \gamma)'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|}}$$

Vi får altså et målforhold for hvert punkt P og hver retning $\gamma'(t_0)$

Eksempel 6.0.1 *Hovedmålforholdet.* En projektion vil ofte blive betragtet som bestående af to afbildninger: En, der “skrumper” kuglefladen med radius R til en kugleflade med radius r : $F(x, y, z) = \frac{r}{R}(x, y, z)$ og en afbildning fra den lille kugle til planen, som skal have et målforhold tæt på 1. Hovedmålforholdet er målforholdet for afbildningen F . Det kan vi nemt regne ud: $F \circ \gamma(t) = \frac{r}{R}\gamma(t)$, så $(F \circ \gamma)'(t) = \frac{r}{R}\gamma'(t)$ og altså er målforholdet

$$\frac{|(F \circ \gamma)'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|} = \frac{r}{R}$$

for alle kurver γ og alle punkter $\gamma(t_0)$.

6.1 Målforhold og kædereglene

En kurve γ på kuglefladen eller ellipsoiden, kan beskrives ved de geografiske koordinater:

$$\gamma(t) = \mathbf{X}(\lambda(t), \varphi(t))$$

hvor

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

hvis datumfladen er kuglefladen.

Hvis datumfladen er en omdrejningsellipsoiden med halvaksler a og b har vi

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cdot \cos \varphi \sin \lambda \\ N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Hvor

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

og

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Tilsvarende kan billedkurven efter projektion, $f \circ \gamma(t)$, beskrives via de geografiske koordinater. Det er netop det, vi gør når en projektion skrives $(\lambda, \varphi) \rightarrow (f_1(\lambda, \varphi), f_2(\lambda, \varphi))$. Vi vil bruge notationen $\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = (f_1(\lambda, \varphi), f_2(\lambda, \varphi))$ for den analytiske fremstilling af projektionen i geografiske koordinater.

Til beregning af målforhold skal vi altså bruge $|\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{X}}(\lambda(t), \varphi(t))|$ og $|\frac{d}{dt}\mathbf{X}(\lambda(t), \varphi(t))|$.

Det udregner vi systematisk ved brug af kædereglene:

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(\lambda(t), \varphi(t)) = \mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)$$

Længden udregnes ved skalarprodukt:

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)|^2 &= \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \\ &(\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)) \cdot (\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)) \\ &= \mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))(\lambda'(t))^2 + 2\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t)\varphi'(t) \end{aligned}$$

$$+\mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))(\varphi'(t))^2$$

Eller lidt kortere, hvor vi underforstår, at \mathbf{X}_λ og \mathbf{X}_φ er funktioner af $(\lambda(t), \varphi(t))$:

$$|\gamma'(t)|^2 = (\mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\lambda)(\lambda'(t))^2 + 2(\mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\varphi)\lambda'(t)\varphi'(t) + (\mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi)(\varphi'(t))^2$$

og tilsvarende:

$$|(f \circ \gamma)'(t)|^2 = (\tilde{\mathbf{X}}_\lambda \cdot \tilde{\mathbf{X}}_\lambda)(\lambda'(t))^2 + 2(\tilde{\mathbf{X}}_\lambda \cdot \tilde{\mathbf{X}}_\varphi)\lambda'(t)\varphi'(t) + (\tilde{\mathbf{X}}_\varphi \cdot \tilde{\mathbf{X}}_\varphi)(\varphi'(t))^2$$

Udregning af længderne og dermed målforholdet er altså blevet delt i de afledte af $\lambda(t)$ og $\varphi(t)$ samt nogle størrelser, der afhænger af punktet $P = \gamma(t) = (\lambda, \varphi)$, som vi vil indføre en notation for:

$$\begin{aligned} E(\lambda, \varphi) &= \mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \cdot \mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \\ F(\lambda, \varphi) &= \mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) \\ G(\lambda, \varphi) &= \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Funktionerne E , F og G kaldes koefficienterne til *første fundamentalform* for kuglefladen/ellipsoiden. Og de tilsvarende størrelser \tilde{E} , \tilde{F} og \tilde{G} er koefficienterne til første fundamentalform for projektionen. Første fundamentalform skrives også

$$(ds)^2 = E(d\lambda)^2 + 2Fd\lambda d\varphi + G(d\varphi)^2$$

målforholdet kan nu skrives

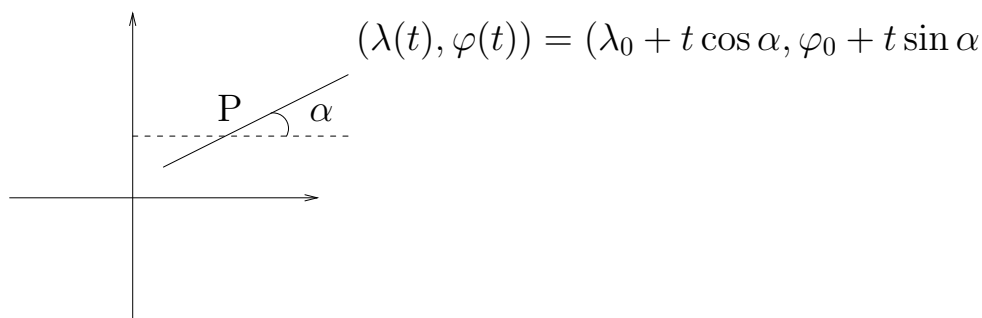
$$m((\lambda, \varphi), \gamma')^2 = \frac{\tilde{E}(\lambda')^2 + 2\tilde{F}\lambda'\varphi' + \tilde{G}(\varphi')^2}{E(\lambda')^2 + 2F\lambda'\varphi' + G(\varphi')^2} \tag{6.2}$$

Sætning 6.1.1 *målforholdet afhænger kun af punktet (λ, φ) og tangentretningen $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$*

Bevis: Vi skal vise, at målforholdet langs en kurve med tangent givet ved $\gamma'(t) = \mathbf{X}_\lambda\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi\varphi'(t)$ er det samme som langs en kurve med tangent $k\gamma'(t) = k(\mathbf{X}_\lambda\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi\varphi'(t))$. Det kan omskrives til $k\gamma'(t) = \mathbf{X}_\lambda k\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi k\varphi'(t)$ og fra 6.2 ved vi, at målforholdet så kan beregnes som

$$m((\lambda, \varphi), k\gamma')^2 = \frac{\tilde{E}(k\lambda')^2 + 2\tilde{F}k\lambda'k\varphi' + \tilde{G}(k\varphi')^2}{E(k\lambda')^2 + 2Fk\lambda'k\varphi' + G(k\varphi')^2}$$

Man forkorter med k^2 og ser, at $m((\lambda, \varphi), k\gamma') = m((\lambda, \varphi), \gamma')$ □

Figure 6.2: Målforhold i retning α

Vi har altså et målforhold for hvert punkt og i enhver tangentretning. Skal vi kende alle målforhold, er det således nok at se på situationen, hvor (λ', φ') har længde 1.

Enhedsvektorer kan skrives $(\lambda', \varphi') = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. I hvert punkt $P = \mathbf{X}(\lambda_0, \varphi_0)$ kan vi således nøjes med at studere målforhold langs linier i parameterplanen ((λ, φ) -planen)

$$(\lambda_0 + t \cos \alpha, \varphi_0 + t \sin \alpha),$$

som jo netop opfylder, at $(\lambda'(0), \varphi'(0)) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ og $\mathbf{X}(\lambda(0), \varphi(0)) = P$

Målforholdet i P i retning α er

$$m(P, \alpha)^2 = \frac{\tilde{E} \cos^2 \alpha + 2\tilde{F} \cos \alpha \sin \alpha + \tilde{G} \sin^2 \alpha}{E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha}$$

I alle beregninger af målforhold får vi altså brug for første fundamentalform for kugleflader eller omdrejningsellipsoider.

6.2 Første fundamentalform for kugleflader og ellipsoider

Først finder vi første fundamentalform for kuglefladen:

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Koefficienterne til første fundamentalform for kuglen er altså

$$E(\lambda, \varphi) = R^2 \cos^2 \varphi, \quad F(\lambda, \varphi) = 0, \quad G(\lambda, \varphi) = R^2 \quad (6.3)$$

For ellipsoiden er det lidt mere omstændeligt, men det lader sig dog gøre. Man får efter omhyggelig differentiation ...

$$E = N^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = 0$$

$$G = M^2$$

Hvor

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

6.3 Udregninger af målforhold

Eksempel 6.3.1 *Langs en længdegrad/meridian, er $\alpha = \pi/2$, så målestokken er*

$$m(P, \pi/2) = \sqrt{\frac{\tilde{G}}{G}}$$

Langs en breddecirkel/parallel, er $\alpha = 0$, og målestokken er

$$m(P, 0) = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}}$$

Eksempel 6.3.2 *Målforholdet for Gnomonisk planprojektion.*

Projektionen har analytisk form

$$\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \cot \varphi \cos \lambda \\ \cot \varphi \sin \lambda \end{pmatrix}$$

hvoraf

$$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cot \varphi \sin \lambda \\ \cot \varphi \cos \lambda \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sin^2 \varphi} \cos \lambda \\ \frac{-1}{\sin^2 \varphi} \sin \lambda \end{pmatrix}$$

Første fundamentalform er altså

$$\tilde{E}(\lambda, \varphi) = \cot^2 \varphi, \quad \tilde{F}(\lambda, \varphi) = 0, \quad \tilde{G}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sin^4 \varphi}$$

Målforholdet bliver så

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{\cot^2 \varphi \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^4 \varphi} \sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha}$$

Langs en breddecirkel får vi

$$m((\lambda, \varphi), 0) = \sqrt{\frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{R \sin \varphi}$$

og langs en længdegrad:

$$m((\lambda, \varphi), \pi/2) = \sqrt{\frac{1}{R^2 \sin^4 \varphi}} = \frac{1}{R \sin^2 \varphi}$$

Eksempel 6.3.3 Ortografisk planprojektion. Her er

$$\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \end{pmatrix}$$

Og vi får

$$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \end{pmatrix}$$

Så

$$\tilde{E}(\lambda, \varphi) = \cos^2 \varphi, \quad \tilde{F}(\lambda, \varphi) = 0, \quad \tilde{G}(\lambda, \varphi) = \sin^2 \varphi$$

Første fundamentalform for kuglefladen blev regnet ud ovenfor. Heraf

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}$$

Langs en breddegrad fås:

$$m((\lambda, \varphi), 0) = \sqrt{\frac{1}{R^2}} = \frac{1}{R}$$

og langs en længdegrad

$$m((\lambda, \varphi), \pi/2) = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{R^2}} = \frac{|\sin \varphi|}{R}$$

Eksempel 6.3.4 Stereografisk projektion. Den behandles nøjere i en opgave! Her får man ved udregninger som ovenfor

$$m((\lambda, \varphi), \alpha) = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$$

målforholdet afhænger altså ikke af vinklen α . Vi vil senere se, at det betyder, at projektionen er konform.

Eksempel 6.3.5 Centralcyklindrisk projektion.

$$\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \tan \varphi \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \end{pmatrix}$$

Og koefficienterne til første fundamentalform er

$$\tilde{E}(\lambda, \varphi) = 1, \quad \tilde{F}(\lambda, \varphi) = 0, \quad \tilde{G}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\cos^4 \varphi}$$

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^4 \varphi} \sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}$$

$$m((\lambda, \varphi), 0) = \sqrt{\frac{1}{R^2}} = \frac{1}{R}$$

$$m((\lambda, \varphi), \pi/2) = \sqrt{\frac{1}{R^2 \cos^4 \varphi}} = \frac{1}{R \cos^2 \varphi}$$

Eksempel 6.3.6 Archimedes' projektion

$$\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha}$$

$$m((\lambda, \varphi), 0) = \sqrt{\frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{R \cos \varphi}$$

$$m((\lambda, \varphi), \pi/2) = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{R^2}} = \frac{\cos \varphi}{R}$$

Bemærk, at produktet $m((\lambda, \varphi), 0)m((\lambda, \varphi), \pi/2) = \frac{1}{R^2}$ er konstant. Vi vil senere se, at det betyder, at projektionen er arealbevarende.

Chapter 7

Første fundamentalform og forvanskninger af vinkler og arealer

I foregående afsnit viste det sig, at første fundamentalform spiller en central rolle i målforholdsberegninger. I dette kapitel sættes fokus på deformation af vinkler og arealer. Målet er i første omgang at kunne beregne forvanskningerne ved en given projektion, men nok så vigtigt vil analysen her senere gøre det muligt at konstruere projektioner med ønskede egenskaber - arealbevarende eller vinkelbevarende projektioner.

Forvanskninger ved afbildning fra kuglen/ellipsoiden til ellipsoiden, kan studeres som den forvanskning, der sker fra planen til kuglen/ellipsoiden ved geografiske koordinater X i forhold til den forvanskning, der sker ved kortet (afbildningen \tilde{X} udtrykker kortet i geografiske koordinater), se fig. 7.1

7.1 Vinkler og første fundamentalform

Vinkelforvanskningen er et udtryk for forskellen på vinkler mellem kurver på datumfladen (kugleflade/ellipsoide) og vinkler mellem billedkurverne i i kortet.

Ligesom med målforholdet, kan dette systematiseres ved brug af første fundamentalform:

Vi ser på to kurver $\gamma_1(t)$ og $\gamma_2(t)$ på datumfladen, som skærer hinanden i $t = 0$. Disse skrives i geografiske koordinater:

$$\gamma_1(t) = \mathbf{X}(\lambda_1(t), \varphi_1(t))$$

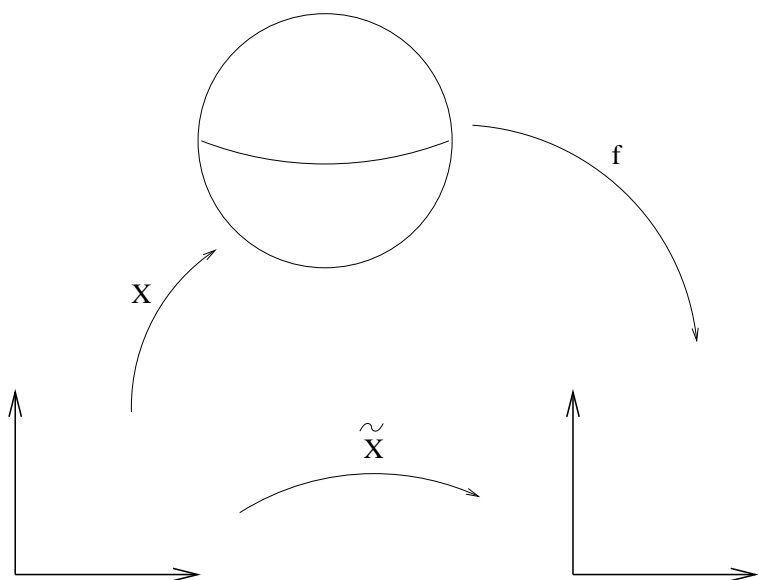


Figure 7.1: Forvanskninger fra kuglen til planen er en kvotient af forvanskninger ved \tilde{X} og ved X

$$\gamma_2(t) = \mathbf{X}(\lambda_2(t), \varphi_2(t))$$

Vinklen v mellem kurverne defineres til at være vinklen mellem deres tangentvektorer, så vi har

$$\cos v = \frac{\gamma_1'(0) \cdot \gamma_2'(0)}{|\gamma_1'(0)| |\gamma_2'(0)|}$$

Bruger vi nu kædereglen på $\gamma_i'(t) = \mathbf{X}(\lambda_i(t), \varphi_i(t))$, kan dette udregnes til

$$\cos v = \frac{E\lambda_1'\lambda_2' + F(\lambda_1'\varphi_2' + \lambda_2'\varphi_1') + G\varphi_1'\varphi_2'}{\sqrt{(E(\lambda_1')^2 + 2F\lambda_1'\varphi_1' + G(\varphi_1')^2)}\sqrt{(E(\lambda_2')^2 + 2F\lambda_2'\varphi_2' + G(\varphi_2')^2)}}$$

Vinklen w mellem de projicerede kurver $\tilde{\mathbf{X}}(\lambda_i(t), \varphi_i(t))$ udregnes tilsvarende, og vi finder

$$\cos w = \frac{\tilde{E}\lambda_1'\lambda_2' + \tilde{F}(\lambda_1'\varphi_2' + \lambda_2'\varphi_1') + \tilde{G}\varphi_1'\varphi_2'}{\sqrt{(\tilde{E}(\lambda_1')^2 + 2\tilde{F}\lambda_1'\varphi_1' + \tilde{G}(\varphi_1')^2)}\sqrt{(\tilde{E}(\lambda_2')^2 + 2\tilde{F}\lambda_2'\varphi_2' + \tilde{G}(\varphi_2')^2)}}$$

Nu kan vi således i princippet udregne forskellen på v og w , omend det er ganske besværligt!

7.1.1 Vinkelbevarende projektioner

En vinkelbevarende projektion kaldes også konform. Vi ved nu, at en sådan projektion skal opfylde $v = w$ og altså $\cos v = \cos w$ for alle v og i alle punkter P .

Vi ser på nogle tilfælde:

1. $(\lambda'_1, \varphi'_1) = (1, 0)$ og $(\lambda'_2, \varphi'_2) = (0, 1)$. Så er $\cos v = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ og $\cos w = \frac{\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}}$
2. $(\lambda'_1, \varphi'_1) = (1, 1)$ og $(\lambda'_2, \varphi'_2) = (1, 0)$. Så er $\cos v = \frac{E+F}{\sqrt{E}\sqrt{E+2F+G}}$ og $\cos w$ opskrives tilsvarende.
3. $(\lambda'_1, \varphi'_1) = (1, 1)$ og $(\lambda'_2, \varphi'_2) = (0, 1)$. Så er $\cos v = \frac{E+F}{\sqrt{G}\sqrt{E+2F+G}}$ og igen kan $\cos w$ opskrives tilsvarende.

Vi får nu tre ligninger, der skal være opfyldt for en konform projektion:

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}}$$

$$\frac{E+F}{\sqrt{E+2F+G}\sqrt{E}} = \frac{\tilde{E}+\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}+2\tilde{F}+\tilde{G}}\sqrt{\tilde{E}}}$$

og

$$\frac{E+F}{\sqrt{E+2F+G}\sqrt{G}} = \frac{\tilde{E}+\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}+2\tilde{F}+\tilde{G}}\sqrt{\tilde{G}}}$$

Fra de sidste to ligninger fås $\frac{E}{G} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}}$, og indsættes det i den første ser man $F = \tilde{F} = 0$ eller $\frac{F}{F} = \frac{E}{E} = \frac{G}{G}$.

Det er altså en nødvendig betingelse for en konform projektion. Omvendt: Hvis en projektion opfylder ligningerne ovenfor, så er den konform: Lad $k = \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$. Så er $E = k\tilde{E}$, $G = k\tilde{G}$ og $F = k\tilde{F}$ (også, hvis $F = \tilde{F} = 0$).

Vi udregner

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{E\lambda'_1\lambda'_2 + F(\lambda'_1\varphi'_2 + \lambda'_2\varphi'_1) + G\varphi'_1\varphi'_2}{\sqrt{(E(\lambda'_1)^2 + 2F\lambda'_1\varphi'_1 + G(\varphi'_1)^2)}\sqrt{(E(\lambda'_2)^2 + 2F\lambda'_2\varphi'_2 + G(\varphi'_2)^2)}} \\ &= \frac{k\tilde{E}\lambda'_1\lambda'_2 + k\tilde{F}(\lambda'_1\varphi'_2 + \lambda'_2\varphi'_1) + k\tilde{G}\varphi'_1\varphi'_2}{\sqrt{(k\tilde{E}(\lambda'_1)^2 + 2k\tilde{F}\lambda'_1\varphi'_1 + k\tilde{G}(\varphi'_1)^2)}\sqrt{(k\tilde{E}(\lambda'_2)^2 + 2k\tilde{F}\lambda'_2\varphi'_2 + k\tilde{G}(\varphi'_2)^2)}} \end{aligned}$$

Sættes k udenfor og forkortes væk, ser man $\cos v = \cos w$.

Vi har vist:

Sætning 7.1.1 *En projektion med første fundamentalform \tilde{E} , \tilde{F} , \tilde{G} fra en datumflade med første fundamentalform E , F , G er konform hvis og kun hvis enten*

$$\frac{F}{\tilde{F}} = \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$$

eller

$$F = \tilde{F} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$$

Vore datumflader, kugler og ellipsoider, er parametriseret med $F = 0$, så det er tilfældet $F = \tilde{F} = 0$ og $\frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$, vi skal studere her. Men teorien rækker altså længere end til kortprojektioner.

Konforme projektioner har pæne målforhold:

Sætning 7.1.2 *målforholdet for en konform projektion afhænger ikke af retningen:*

$$m((\lambda, \varphi), \alpha) = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}} = \sqrt{\frac{\tilde{G}}{G}}$$

Omvendt: Hvis målforholdet er uafhængigt af retningen, så er projektionen konform.

Bevis: At en konform projektion har et målforhold som ovenfor, vises ved at indsætte $E = k\tilde{E}$, $G = k\tilde{G}$ og $F = k\tilde{F}$ i formelen for målforholdet.

Hvis målforholdet er uafhængigt af α , så er $m((\lambda, \varphi), 0)^2 = m((\lambda, \varphi), \pi/2)^2 = m((\lambda, \varphi), \pi/4)^2$, så $\frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}} = \frac{E+2F+G}{E+2\tilde{F}+\tilde{G}}$. Heraf følger ligningerne for en konform projektion. \square

Eksempel 7.1.3 *Stereografisk projektion er konform.*

7.2 Arealer og første fundamentalform

Arealet af et område $\mathbf{X}(U)$, hvor $U \subset \mathbb{R}^2$ udregnes - ikke overraskende- som et dobbeltintegralt. Det viser sig at give mening at definere

$$\text{Areal}(\mathbf{X}(U)) = \int \int_U |\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi)| d\lambda d\varphi$$

Hvis U er området afgrænset af $a \leq \lambda \leq b$ og $c \leq \varphi \leq d$ fås

$$Areal(\mathbf{X}(U)) = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi)| d\lambda d\varphi$$

Det geometriske indhold i definitionen af arealet er, at $|\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi)|$ er arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne $\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi)$ og $\mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi)$, så integralet er en grænseovergang fra en sum af små arealer

$$\sum_{i=1}^N |\mathbf{X}_\lambda(\lambda_i, \varphi_i) \Delta\lambda \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda_i, \varphi_i) \Delta\varphi| = \sum_{i=1}^N |\mathbf{X}_\lambda(\lambda_i, \varphi_i) \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda_i, \varphi_i)| \Delta\lambda \Delta\varphi$$

altså en Riemannsum for ovenstående dobbeltintegrals.

Arealet af billedet ved projektion er

$$Areal(\tilde{\mathbf{X}}(U)) = \int_c^d \int_a^b |\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) \times \tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi)| d\lambda d\varphi$$

Arealerne kan udtrykkes ved første fundamentalform ved brug af formelen $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 |\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}$, som læseren er velkommen til at vise - det kan gøres ved at skrive alting op i koordinater. Bruges denne, fås

$$Areal(\mathbf{X}(U)) = \int_c^d \int_a^b \sqrt{EG - F^2} d\lambda d\varphi$$

og

$$Areal(\tilde{\mathbf{X}}(U)) = \int_c^d \int_a^b \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} d\lambda d\varphi$$

Hvis projektionen er arealbevarende, skal disse integraler være ens for alle valg af området U , og det medfører, at integranderne er ens. Hvis integranderne er ens, er integralerne det naturligtvis også, i.e.,

Sætning 7.2.1 *En projektion er arealbevarende hvis og kun hvis $EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ for alle (λ, φ) .*

Eksempel 7.2.2 *Archimedes' projektion er arealbevarende.*

Chapter 8

Konstruktion af vinkel- eller arealbevarende projektioner

I sidste kapitel fandt vi nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at projektioner er vinkel eller arealbevarende. Og vi så, at stereografisk projektion bevarer vinkler, mens Archimedes' projektion bevarer arealer. I dette kapitel vil vi konstruere flere konforme og arealbevarende projektioner.

Ligningerne

$$\frac{F}{\tilde{F}} = \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$$

$$F = \tilde{F} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{G}{\tilde{G}}$$

og

$$EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$$

er partielle differentiaalligninger: De giver relationer mellem de partielle afledede af \mathbf{X} og $\tilde{\mathbf{X}}$. Det er absolut ikke simpelt at løse sådanne ligninger, og vi vil da også reducere problemet på forskellig vis. Ved at begrænse den mængde af funktioner, $\tilde{\mathbf{X}}$, vi vil løse ligningerne for, på en sådan måde, at vi i stedet for partielle differentiaalligninger får sædvanlige differentiaalligninger.

8.1 Cylinderprojektioner igen

I studiet af projektioner fra et geometrisk synspunkt så vi på denne type projektioner. De projektioner, vi fandt, er karakteriseret ved, at meridianer går i linier parallelt med y -aksen, mens breddecirkler går i linier parallelt med x -aksen. De har formen $(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, h(\varphi))$, hvor h bestemmer, hvor højt en breddecirkel med

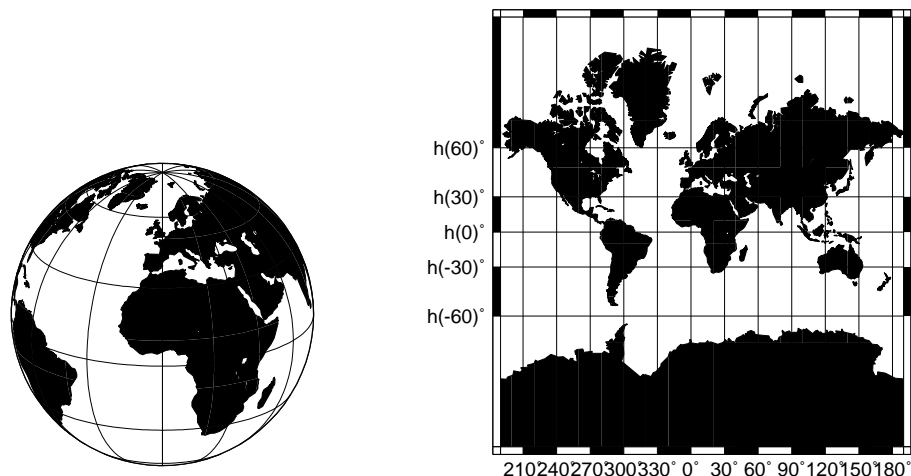


Figure 8.1: En cylinderprojektion $(\lambda, \varphi) \rightarrow (c\lambda, h(\varphi))$

breddevinkel φ skal afbildes op. Generaliserer vi dette, idet vi tillader en skalering $\lambda \rightarrow c\lambda$ får vi:

En cylinderprojektion er en projektion $\tilde{\mathbf{X}}(\lambda, \varphi) = (c\lambda, h(\varphi))$, hvor c er positiv (retning mod vest skal være til venstre på kortet), $h(\varphi)$ er differentiabel, voksende (Nord skal være opad i kortet) og h er injektiv.

8.1.1 Første fundamentalform og målforhold for en cylinderprojektion

$$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda(\lambda, \varphi) = (c, 0)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_\varphi(\lambda, \varphi) = (0, h'(\varphi))$$

$$\tilde{E}(\lambda, \varphi) = c^2, \tilde{F}(\lambda, \varphi) = 0, \tilde{G}(\lambda, \varphi) = h'(\varphi)^2$$

målforholdet for en cylinderprojektion fra en kugleflade med radius 1 er

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{c^2 \cos^2 \alpha + (h'(\varphi))^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

Langs bredde og længdegrader: $m((\lambda, \varphi), 0) = \frac{c}{\cos \varphi}$ og $m((\lambda, \varphi), \pi/2) = h'(\varphi)$

8.1.2 Den konforme cylinderprojektion

Hvis datumfladen er kuglefladen med radius 1, er ligningen for konformitet $\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{G}}{G}$, altså $\frac{c^2}{\cos^2 \varphi} = h'(\varphi)^2$. Da $h'(\varphi)$ er positiv, får vi $h'(\varphi) = \frac{c}{\cos \varphi}$, et stamfunktion-problem.

Løsningen til dette er $h(\varphi) = c \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)) + k$, hvor k er en konstant. Hvis vi sender Ækvator i x -aksen, er $k = 0$, og vi har

En konform cylinderprojektion er en Mercatorprojektion:

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (c\lambda, c \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$$

Man kalder sommetider projektioner, hvor $c \neq 1$, for modificerede Mercatorprojektioner, og kun den med $c = 1$ er så Mercatorprojektionen. Det vil vi ikke skelne mellem her.

8.1.3 Den arealbevarende cylinderprojektion

Vi har jo allerede en arealbevarende cylinderprojektion, nemlig Archimedes' projektion. Og det er faktisk også den eneste - bortset fra skalering: Differential-ligningerne for arealbevarelse giver

$$EG = \tilde{E}\tilde{G} \Leftrightarrow \cos^2 \varphi = c^2 h'(\varphi)^2 \Leftrightarrow h'(\varphi) = \frac{1}{c} \cos \varphi$$

hvor vi bruger, at $h'(\varphi)$ og $\cos \varphi$ er positive.

Heraf følger $h(\varphi) = \frac{1}{c} \sin \varphi$, og altså har vi: En arealbevarende cylinderprojektion har formen

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (c\lambda, \frac{1}{c} \sin \varphi)$$

Geometrisk kan man fortolke c som radius i den cylinder, man projicerer på. For $c < 1$ er det en cylinder, der skærer kuglen i bredde cirklen med $\cos \varphi_0 = c$

Eksempel 8.1.1 *Peters projektionen, som nogen har et nærmest religiøst, eller i hvert fald politisk forhold til (søg på nettet og se, hvad de dog skriver), er en arealbevarende cylinderprojektion med $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\varphi_0 = 45^\circ$) - somme tider er brugt lidt større eller mindre c .*

8.2 Planprojektioner igen

De geometriske planprojektioner omkring Nordpolen, som vi studerede tidligere, opfylder allesammen, at meridianer går i halvlinier startende i Origo, mens bred-

decirkler går i cirkler med centrum i Origo. Generelle planprojektioner er projektioner, der opfylder denne karakteristik. Altså har formen

$$\tilde{X}(\lambda, \varphi) = r(\varphi)(\cos \lambda, \sin \lambda)$$

Første fundamentalform udregnes:

$$\tilde{X}_\lambda(\lambda, \varphi) = r(\varphi)(-\sin \lambda, \cos \lambda)$$

$$\tilde{X}_\varphi(\lambda, \varphi) = r'(\varphi)(\cos \lambda, \sin \lambda)$$

og altså

$$\tilde{E}(\lambda, \varphi) = r(\varphi)^2, \quad \tilde{F}(\lambda, \varphi) = 0, \quad \tilde{G}(\lambda, \varphi) = r'(\varphi)^2$$

målforholdet for en generel planprojektion er:

$$m((\lambda, \varphi), \alpha)^2 = \frac{r(\varphi)^2 \cos^2 \alpha + r'(\varphi)^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

$$m((\lambda, \varphi), 0) = \frac{r(\varphi)}{\cos \varphi}, \quad \text{og } m((\lambda, \varphi), \pi/2) = |r'(\varphi)|$$

Havde vi placeret projektionsplanen i $z = -1$, ville formlerne ovenfor blive de samme, men $r(\varphi)$ skal så være voksende, hvor den er aftagende ved projektion omkring Nordpolen.

8.2.1 Den konforme planprojektion omkring Nordpolen

Vi har jo set, at stereografisk projektion er konform. Men det er også den eneste konforme planprojektion - bortset fra en skalering.

$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{G}}{G}$ er opfyldt hvis og kun hvis

$$\frac{r(\varphi)^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{r'(\varphi)^2}{1} \Leftrightarrow \frac{r(\varphi)}{\cos \varphi} = -r'(\varphi)$$

hvor vi antager, at $r(\varphi)$ er positiv og $r'(\varphi)$ er negativ - Nordpolen skal afbildes i Origo, så $r(\varphi)$ er aftagende.

Denne differentiaalligning kan f.eks. løses ved separation af de variable, eller man kan få Maple til at løse den. Løsningen er

$$r(\varphi) = c \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

målforholdet er

$$m(\lambda, \varphi) = \frac{c}{1 + \sin \varphi}$$

Den geometriske stereografiske projektion har $c = 2$

Projektion omkring Sydpolen ville give

$$r(\varphi) = c \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

8.2.2 Den arealbevarende planprojektion

Differentialligningerne for denne er

$$\cos^2 \varphi = r(\varphi)^2 r'(\varphi)^2$$

eller $\cos \varphi = -r(\varphi)r'(\varphi)$, som igen kan løses med resultatet $r(\varphi) = \sqrt{2 \sin \varphi - 2}$. Man skal undervejs bruge, at $r(\pi/2) = 0$ til at bestemme en konstant.

8.3 Kegleprojektioner igen

$$\tilde{X}(\lambda, \varphi) = (r(\varphi) \cos(a\lambda), r(\varphi) \sin(a\lambda))$$

hvor a er en konstant, og $0 < a \leq 1$. For $a = 1$ har vi en planprojektion. Første fundamentalform bliver $\tilde{E} = (ar(\varphi))^2$, $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = (ar'(\varphi))^2$

og konforme kegleprojektioner har formen

$$\tilde{X}(\lambda, \varphi) = (f(\varphi) \cos a\lambda, f(\varphi) \sin a\lambda)$$

hvor $f(\varphi) = e^k \cdot (\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}))^{-a}$

målforholdet er:

$$m(\lambda, \varphi) = \frac{e^k \cdot a \cdot (\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}))^{-a}}{\cos \varphi}$$

Den geometriske fortolkning af denne projektion er: En kegle med åbningsvinkel φ_0 , hvor $a = \sin(\varphi_0)$ anbringes over Nordpolen af kuglen/ellipsoiden, og $f(\varphi)$ bestemmer, hvor højt op breddecirklerne afbildes. k er en vilkårlig konstant, så e^k er en positiv konstant. Det plane billede ved en kegleprojektion fås ved at folde keglen ud.

Chapter 9

Konstruktion af konforme projektioner med lille målestoksafvigelse

Et fornuftigt krav til en kortprojektion - og i hvert fald det, man kræver i virkeligheden - er, at den skal være konform og at målforholdet ikke skal afvige for meget fra hovedmålforholdet på det område, man ønsker at kortlægge. For et givet område er opgaven altså at vælge en konform projektion, der er passende, og at vælge den skaleringskonstant, der indgår i projektionen, så målestoksafvigelsen bliver lille indenfor det givne område.

Læs nærmere om dette på spisesedlerne, hvor I vil regne opgaver, der går ud på netop dette.

Det bliver også nødvendigt at ændre positionen af projektionsfladen, så vi f.eks. ikke projicerer på en cylinder anbragt omkring Ækvator, men i stedet tangerende en meridian. Læs mere om det i [2].

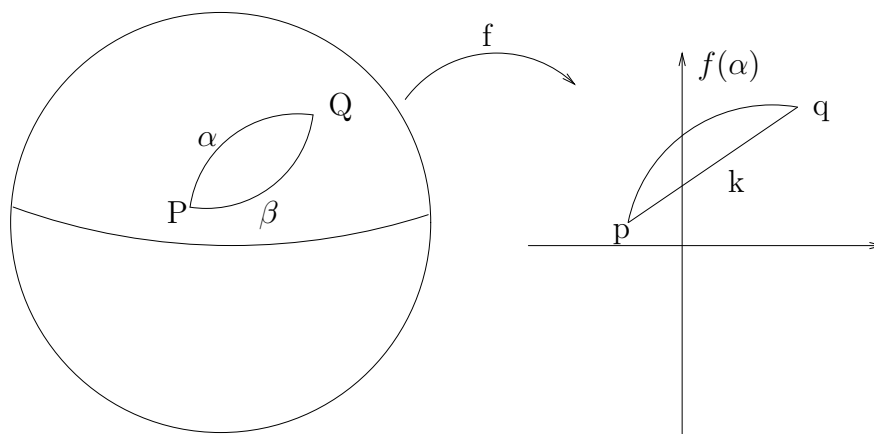
Chapter 10

Afstandskorrektionen

Nu kan vi regne målforhold ud for en projektion, men hvordan regner man så rent faktisk om fra afstanden mellem to punkter målt i kortet til afstande i naturen og tilbage? Vi vil se på dette, hvor projektionen er konform, så målforholdet altså ikke afhænger af, hvad retning, man går, men “kun” af punkterne. Problemet består kort sagt i følgende: Givet en afbildning f fra kuglefladen (ellipsoiden) ind i planen. To punkter P, Q på kuglen afbildes i punkter p, q i planen. Hvilken sammenhæng består der mellem den sfæriske afstand S mellem P og Q og den plane afstand d mellem p og q ? Tænker man lidt efter, så optræder der faktisk 4 kurver, der er knyttet til problemet:

1. den geodætiske korteste forbindelse α mellem P og Q (for en kugle drejer det sig om en storcirkelbue) med længde S
2. dens billede $f(\alpha)$ er normalt en krum kurve fra p til q med længde s
3. den korteste forbindelse mellem p og q er naturligvis det rette liniestykke imellem dem (korden k), med længde d
4. Korden er billedet af en kurve $\beta = f^{-1}(k)$ med længde D . Kurven β er normalt ikke en storcirkelbue.

Sammenhængen mellem længderne S og s fra (1) og (2), hhv. D og d kan bestemmes vha. målforholdsfunktionen. Til gengæld er det forholdsvis svært, at bestemme forskellen mellem d og s (eller D og S), men også det kan lade sig gøre approksimativt, under anvendelse af numeriske metoder. I landmålingssammenhæng er disse sidste korrekturled heldigvis små og uden praktisk betydning, hvorimod der skal tages hensyn til dem i geodætisk sammenhæng. Vi nøjes her med at bestemme afstandskorrektionen $\sigma = s - S$ idet vi beregner $d - D$, som ifølge ovenstående er en god approksimation til σ :



En parameterfremstilling for korden k er, $\bar{x}(t) = p + t \cdot \frac{p\bar{q}}{|p\bar{q}|}$ og den tilsvarende parameterfremstilling for β er så $\bar{y}(t) = f^{-1}(\bar{x}(t))$. Bemærk, at $|\bar{x}'(t)| = 1$. Vi siger, at k er parametriseret ved buelængde.

Langs med disse kurver gælder per definition for målforholdet:

$$m(\bar{x}(t)) = m(\bar{y}(t)) = \frac{|\bar{x}'(t)|}{|\bar{y}'(t)|} = \frac{1}{|\bar{y}'(t)|}.$$

Integration langs med β beregner dennes længde D :

$$D = \int_0^d |\bar{y}'(t)| dt = \int_0^d \frac{1}{m(\bar{x}(t))} dt$$

Idet målforholdet normalt kun afviger lidt fra 1, kan man skrive $m = 1 + a$, hvor a er en lille størrelse, og for små værdier af a gælder: $\frac{1}{m} = \frac{1}{1+a} \sim 1 - a$, altså:

$$D \sim \int_0^d (1 - a(\bar{x}(t))) dt = d - \int_0^d a(\bar{x}(t)) dt,$$

$$\sigma \sim d - D \sim \int_0^d a(\bar{x}(t)) dt.$$

For System 34 (jysk-fynsk afsnit) har vi:

$$a(y, x) = -0.00005 + 122,586 \cdot 10^{-16} \cdot (x - 265000)^2,$$

Her betegner x x -koordinaten målt i meter. Jeg følger her notationen fra Kai Borres bog [1].

Indsætter man en parameterfremstilling for det rette liniestykke fra (y, x) til (y_1, x_1) :

$$\bar{x}(t) = (y, x) + \frac{t}{d} \cdot (y_1 - y, x_1 - x)$$

fås:

$$\begin{aligned} d - D &= \int_0^d -0.00005 + 122,586 \cdot 10^{-16} \left(x + \frac{t \cdot (x_1 - x)}{d} - 265000\right)^2 dt = \\ &= -0.00005 \cdot d + 122,586 \cdot 10^{-16} \cdot \int_0^d (x - 265000)^2 + 2 \cdot \frac{(x - 265000) \cdot (x_1 - x)}{d} \cdot t + \frac{(x_1 - x)^2}{d^2} \cdot t^2 = \\ &= -0.00005 \cdot d + 122,586 \cdot 10^{-16} \cdot \left[(x - 265000)^2 \cdot t + (x - 265000) \cdot (x_1 - x) \cdot \frac{t^2}{d} + (x_1 - x)^2 \cdot \frac{t^3}{3 \cdot d^2} \right]_0^d = \\ &= d \cdot \left[-0.00005 + 122,586 \cdot 10^{-16} \cdot \left\{ (x - 265000) \cdot (x - 265000 + x_1 - x) + \frac{1}{3} \cdot (x_1 - x)^2 \right\} \right] = \\ &= d \cdot \left[-0.00005 + 40,862 \cdot 10^{-16} \cdot \left[3(x - 265000)(x_1 - 265000) + (x - x_1)^2 \right] \right] = \end{aligned}$$

$$d \cdot \left[-0.00005 + 40,862 \cdot 10^{-16} \cdot \left[(x - 265000)^2 + (x_1 - 265000)^2 + (x - 265000) \cdot (x_1 - 265000) \right] \right].$$

Med den approksimation, vi allerede har lavet, kan vi også sige

$$d - D \sim$$

$$D \cdot \left[-0.00005 + 40,862 \cdot 10^{-16} \cdot \left[(x - 265000)^2 + (x_1 - 265000)^2 + (x - 265000) \cdot (x_1 - 265000) \right] \right].$$

Tilsvarende gælder:

$$\begin{aligned} \sigma = s - S &\sim \\ s \cdot \left[-0.00005 + 40,862 \cdot 10^{-16} \cdot \left[(x - 265000)^2 + (x_1 - 265000)^2 + (x - 265000) \cdot (x_1 - 265000) \right] \right] &\sim \\ S \cdot \left[-0.00005 + 40,862 \cdot 10^{-16} \cdot \left[(x - 265000)^2 + (x_1 - 265000)^2 + (x - 265000) \cdot (x_1 - 265000) \right] \right]. & \end{aligned}$$

For andre projektioner med mere komplicerede målforholdsfunktioner, vil ovenstående skulle gøres numerisk.

De første led i rækkeudvikling af målforhold for Transversal Mercator har samme form som målforholdet for System 34 $m(N, E) = a + b(E - E_0)^2$, hvor E_0 er Easting for midtmeridianen, den falske Easting. Altså kan ovenstående regninger (gen)bruges til at opnå afstandskorrektion for Transversal Mercator, hvis man ikke ønsker højere nøjagtighed, end de første led i rækkeudviklingen giver.

Chapter 11

Konforme plane afbildninger

Koordinatskift mellem to kort, ombecifring, kan betragtes som en afbildning fra planen ind i planen. Hvis begge kort er konforme, er koordinatskiftsafbildningen det også. Og da vi primært anvender konforme kort, er det relevant at overveje, hvilke konforme plane afbildninger, der findes. Vi genbruger argumenterne om konforme afbildninger fra kuglen til planen:

I Fig. 11 lader vi $X(u, v) = (u, v)$ og $\tilde{X}(u, v) = f(u, v)$ er den afbildning, som vi vil undersøge. Hvad skal der til, for at f er konform?

Alle argumenterne fra kuglefladen kan genbruges, og vi får, at f er konform, hvis og kun hvis

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{G}}{G} \text{ og } F = \tilde{F} = 0$$

Det er let at udregne $E = 1$, $F = 0$ og $G = 1$. Og da $\tilde{X}(u, v) = f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$, er

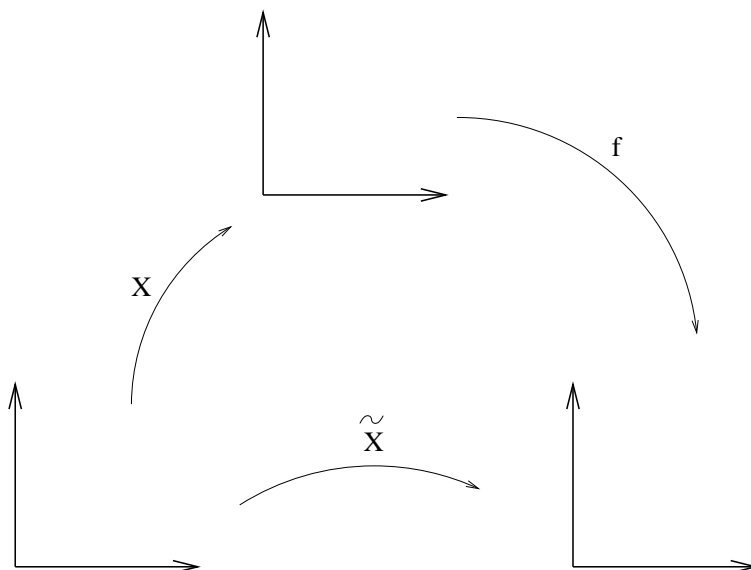
$$\tilde{E} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2, \quad \tilde{G} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2 \text{ og } \tilde{F} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial v}$$

Eller med andre ord; f er konform, hvis og kun hvis vektorerne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

har længde 1 og står vinkelret på hinanden. Hvis vi ved, at kortene har samme orientering, giver det, at

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \text{ og } \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}$$



Har kortene ikke samme orientering får vi

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -\frac{\partial f_2}{\partial v} \text{ og } \frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial u}$$

Eksempel 11.0.1 *Lad*

$$f(u, v) = (a_0 + a_1u + a_2u^2 + buv + c_1v + c_2v^2 // r_0 + r_1u + r_2u^2 + suv + t_1v + t_2v^2)$$

Da er f konform, hvis og kun hvis $a_1 = t_1, s = 2a_2 = -2c_2, b = 2t_2 = -2r_2, r_1 = -c_1$. Med det komplekse polynomium

$$P(u + iv) = (a_0 + ir_0) + (a_1 + ir_1)(u + iv) + (a_2 - it_2)(u + iv)^2$$

fås da $f_1(u, v) = \text{Re}(P(u + iv))$ og $f_2(u, v) = \text{Im}(P(u, v))$.

Det gælder generelt: Hvis $f_1(u, v)$ og $f_2(u, v)$ er polynomier; så er f konform hvis og kun hvis der findes et komplekst polynomium i $u + iv$, så f_1 er realdelen og f_2 er imaginærdelen.

Et komplekst polynomium af grad n har $n+1$ komplekse koefficienter, altså $2(n+1)$ forskellige reelle tal. Et reelt n 'te grads polynomium af 2 variable har $(n+2)(n+1)/2$ reelle koefficienter. Så der er ialt $(n+2)(n+1)$ koefficienter at vælge frit i f_1 og f_2 , hvis f ikke er konform, hvorimod der er $2n+2$, hvis f er konform.

Bibliography

- [1] Kai Borre, *Landmåling*, 1993.
- [2] Lisbeth Fajstrup, *Mercator and Transversal Mercator*, Findes på kursus-hjemmesiden.