Kortprojektioner L4 2017
3.mm Længde og vinkelmåling på flader. Konforme og arealtro kort.

Lisbeth Fajstrup & Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 maj 2017

Sidste gang:

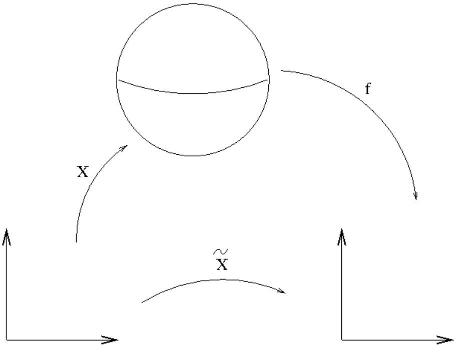
- Længden af et kurvestykke. fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t_1)$ $s = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt$
- Målforhold $m(P, \gamma'(t_0)) = \frac{|(f \circ \gamma)'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|} = \frac{|Df(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|}$ Brug kædereglen og få

$$m((\lambda, \varphi), \gamma')^2 = \frac{\widetilde{E}(\lambda')^2 + 2\widetilde{F}\lambda'\varphi' + \widetilde{G}(\varphi')^2}{E(\lambda')^2 + 2F\lambda'\varphi' + G(\varphi')^2}$$

Konstater, at det kun afhænger af retningen af $\gamma'(t)$. Når $\gamma' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ fås

$$m(P, \alpha)^2 = \frac{\widetilde{E}\cos^2\alpha + 2\widetilde{F}\cos\alpha\sin\alpha + \widetilde{G}\sin^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}$$

Principskitse



Forvanskninger ved f er $\dfrac{\text{Forvanskning ved } \tilde{x}}{\text{Forvanskning ved } x}$

$X(\lambda, \varphi)$ koordinater på kuglen/ellipsoiden. $\tilde{X}(\lambda, \varphi)$ er kortet.
BEREGNING af forvanskninger ved afbildning fra (λ, φ)-planen til kuglen/ellipsoiden/et kort/...

I opgaver:

- Parametrisering af en længdegrad L_{λ_0}
  $(R\cos(s)\cos(\lambda_0), R\cos(s)\sin(\lambda_0), R\sin(s)), -\pi/2 < s < \pi/2$
- Parametrisering af en breddegrad B_{φ_0}
  $(R\cos(\varphi_0)\cos(t), R\cos(\varphi_0)\sin(t), R\sin(\varphi_0)), -\pi < t < \pi$
- Parametrisering efter Mercatorprojektion
  $(\lambda, \varphi) \to (\lambda, \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$
- Billedet af en længdegrad:
  $(\lambda_0, \ln(\tan(\pi/4 + s/2))), -\pi/2 < s < \pi/2$
- Billedet af en breddecirkel:
  $(t, \ln(\tan(\pi/4 + \varphi_0/2))), -\pi < t < \pi$

Udregning af målforhold

- Udregn *koefficienterne* til første fundamentalform for kuglen/ellipsoiden , E, F og G
- Udregn *koefficienterne* til første fundamentalform for kortet, $\widetilde{E}$,$\widetilde{F}$ og $\widetilde{G}$
- Målforholdet i retning efter kurven givet ved $(\lambda(t), \varphi(t))$ fås af

$$m((\lambda,\varphi),\gamma')^2 = \frac{\widetilde{E}(\lambda')^2 + 2\widetilde{F}\lambda'\varphi' + \widetilde{G}(\varphi')^2}{E(\lambda')^2 + 2F\lambda'\varphi' + G(\varphi')^2}$$

Målforhold og retning

Sætning

Målforholdet afhænger kun af punktet (λ, φ) og *tangentretningen* $\frac{\gamma'(t)}{|(\gamma'(t))|}$

En retning er givet ved en vinkel: $(\lambda', \varphi') = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ - f.eks. givet ved en linje i (λ, φ)-planen $(\lambda(t), \varphi(t)) = (\lambda_0 + t\cos\alpha, \varphi_0 + t\sin\alpha)$

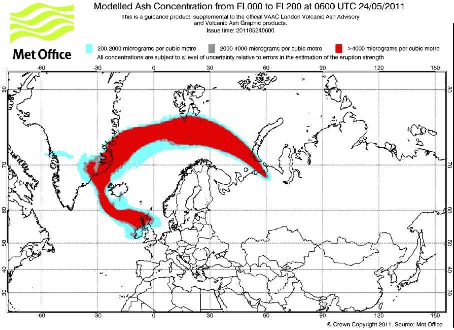
$$m(P, \alpha)^2 = \frac{\widetilde{E}\cos^2\alpha + 2\widetilde{F}\cos\alpha\sin\alpha + \widetilde{G}\sin^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}$$

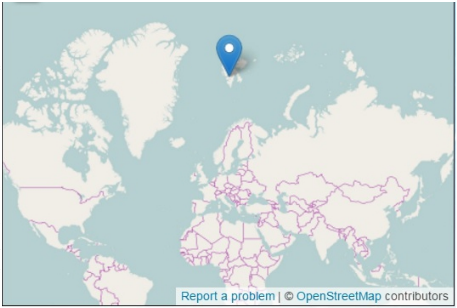
Eksempel - cylinderprojektioner

Idag

- Første Fundamentalform og vinkler
- Første fundamentalform og arealer
- Vinkelbevarende (*konforme*) kort
- Arealbevarende kort

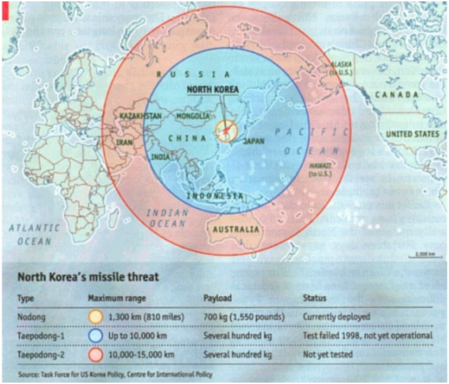
Et par eksempler på misvisende kort

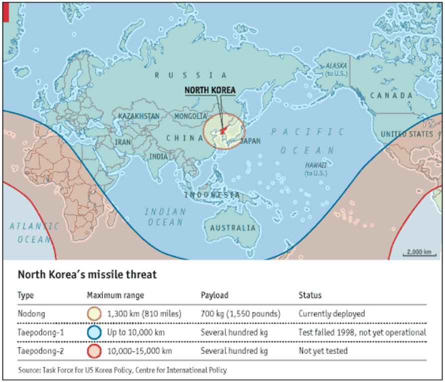




Udbredning af askeskyen fra Eyjafjallajökull og et kort i Politiken, som skulle vise, hvor Svalbard ligger.

Misvisende kort.





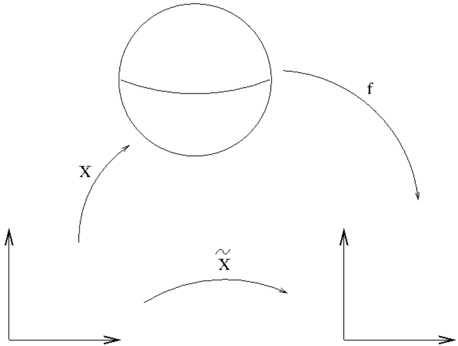
Vinkler mellem kurver

To kurver $\gamma_1(t)$ og $\gamma_2(s)$. Skæringspunkt $P = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$
Vinklen mellem γ_1 og γ_2 i P er vinklen mellem $\gamma_1'(t_0)$ og $\gamma_2'(s_0)$

$$\cos v = \frac{\gamma_1'(t_0) \cdot \gamma_2'(s_0)}{|\gamma_1'(t_0)||\gamma_2'(s_0)|}$$

$$v = \arccos\left(\frac{\gamma_1'(t_0) \cdot \gamma_2'(s_0)}{|\gamma_1'(t_0)||\gamma_2'(s_0)|}\right)$$

Principskitse



Forvanskninger ved f er $\dfrac{\text{Forvanskning ved } \tilde{x}}{\text{Forvanskning ved } x}$

$X(\lambda, \varphi)$ koordinater på kuglen/ellipsoiden. $\tilde{X}(\lambda, \varphi)$ er kortet.
BEREGNING af forvanskninger ved afbildning fra (λ, φ)-planen til kuglen/ellipsoiden/et kort/...

Første fundamentalform og vinkler

$$\gamma_1(t) = \mathbf{X}(\lambda_1(t), \varphi_1(t))$$

$$\gamma_2(t) = \mathbf{X}(\lambda_2(t), \varphi_2(t))$$

$$\cos v = \frac{\gamma_1'(0) \cdot \gamma_2'(0)}{|\gamma_1'(0)||\gamma_2'(0)|}$$

$$\cos v =$$

$$\frac{E\lambda_1'\lambda_2' + F(\lambda_1'\varphi_2' + \lambda_2'\varphi_1') + G\varphi_1'\varphi_2'}{\sqrt{(E(\lambda_1')^2 + 2F\lambda_1'\varphi_1' + G(\varphi_1')^2)}\sqrt{(E(\lambda_2')^2 + 2F\lambda_2'\varphi_2' + G(\varphi_2')^2)}}$$

Første fundamentalform og konforme kort

Sætning

En projektion med første fundamentalform $\widetilde{E},\ \widetilde{F},\ \widetilde{G}$
fra en datumflade med første fundamentalform $E,\ F = 0,\ G$
er konform hvis og kun hvis

$$F = \widetilde{F} = 0 \ \text{ og } \frac{\widetilde{E}}{E} = \frac{\widetilde{G}}{G}$$

for alle (λ, φ)

Konforme kort og målforhold

$$m(P,\alpha)^2 = \frac{\widetilde{E}\cos^2\alpha + 2\widetilde{F}\cos\alpha\sin\alpha + \widetilde{G}\sin^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}$$

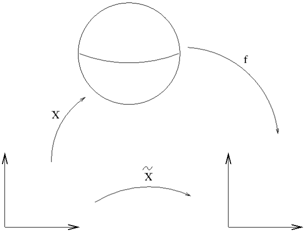
Indsæt $F = \widetilde{F} = 0$ og $\frac{\widetilde{E}}{E} = \frac{\widetilde{G}}{G}$ ($\widetilde{E} = kE$ og $\widetilde{G} = kG$) og få

$m(\lambda,\varphi) = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{\widetilde{E}}{E}} = \sqrt{\frac{\widetilde{G}}{G}}$

Målforholdet for en konform projektioner er uafhængigt af retningen. Og omvendt: En projektion, hvis målforhold er uafhængigt af retningen, er konform. Målforholdet er:

$$m(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{\widetilde{E}}{E}} = \sqrt{\frac{\widetilde{G}}{G}}$$

Første fundamentalform og arealer



$$Areal(\mathbf{X}(U)) = \int\int_U |\mathbf{X}_\lambda(\lambda,\varphi) \times \mathbf{X}_\varphi(\lambda,\varphi)| d\lambda d\varphi =$$

$$\int_c^d \int_a^b \sqrt{EG - F^2} d\lambda d\varphi$$

hvor vi bruger omskrivningen $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{|\mathbf{v}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}$ med $\mathbf{v} = \mathbf{X}_\lambda$ og $\mathbf{w} = \mathbf{X}_\varphi$

Første fundamentalform og arealer

Sætning

En projektion er arealbevarende hvis og kun hvis $EG - F^2 = \widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2$ for alle (λ, φ).

Forste fundamentalform for kuglefladen

$$\mathbf{X}(\lambda,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\lambda \\ R\cos\varphi\sin\lambda \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\lambda(\lambda,\varphi) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\lambda \\ R\cos\varphi\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\varphi(\lambda,\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\lambda \\ -R\sin\varphi\sin\lambda \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$E(\lambda,\varphi) = R^2\cos^2(\varphi)$, $F(\lambda,\varphi) = 0$, $G(\lambda,\varphi) = R^2$

Første fundamentalform for ellipsoiden

$$X(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} N \cdot \cos\varphi \cos\lambda \\ N \cdot \cos\varphi \sin\lambda \\ N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$E = N^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = 0$$

$$G = M^2$$

Hvor

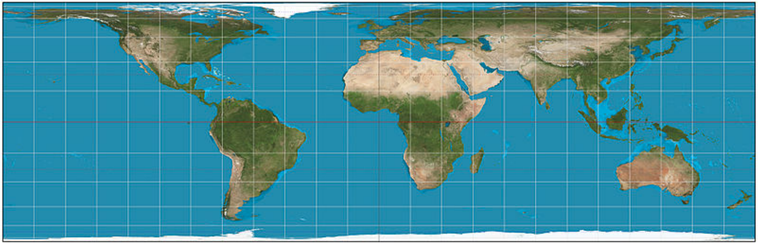
$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Konstruktion af konforme projektioner

Pr. håndkraft...

Mercatorprojektion $(\lambda, \varphi) \to (k\lambda, k\ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$



Archimedes’ arealtro cylinderprojektion

Målforhold og zonebredde

Nøjagtighedskrav kontra zonebredde.