Kortprojektioner L4 2017
5.mm Optimale projektioner. Afstandskorrektion. System 34.

Lisbeth Fajstrup og Iver Ottosen.

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 maj 2017

Optimale projektioner. Afstandskorrektion. System 34.

- Optimale projektioner for et givet område.
- System 34 - hvorfor blev det, som det blev? Hvad er problemerne.
- Omregning fra længder i naturen til kortet og omvendt
- Afstandskorrektion - fra målforhold til afstandskorrektion.
- Taylorudvikling
- Vinkler -mellem hvilke kurver?
- Meridiankonvergens

Egenskaber ved transversal Mercator/UTM

- Konform
- Målforhold afhænger kun af afstand til midtelinjen
  - da målforhold i Mercatorprojektionen kun afhænger af afstand til Ækvator.
  - og TM blot er Mercator sammensat med rotation.

  Eller - pr. definition - for ellipsoiden.
- Midtelinjen er en meridian
- Andre meridianer afbildes ikke som rette linier
- Ækvator afbildes som en ret linie.
- andre breddecirkler afbildes ikke som rette linier.

- Koordinatnettet (Northing,Easting) koordinaterne måler Northing parallelt med Midtelinien, Easting parallelt med Ækvator.
- Der er (har været) to forskellige UTM systemer i brug i DK: UTM_{ED50} og $UTM_{EUREF89/ETRS89}$

Bemærk:

- Eastingkoordinaten er en funktion af afstanden (i naturen) til midtemeridianen, da “y-koordinaten” i en Mercatorprojektion er $\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}))$. Og ϕ er en funktion af afstanden til Ækvator.
- Og omvendt: Afstanden til midtemeridianen er en funktion af Eastingkoordinaten.
- Derfor kan målforholdet skrives som en funktion af Eastingkoordinaten.
- mere senere idag...

Zonebredde og målforhold - Eksamensopgave 2 og 3 del 1

Optimale Transversale Mercatorkort nord for 54°

- Med System 34 kravene fås en zonebredde på $2x90km$
- To kort i Jylland (hver 90 km brede) $0.9999875 \leq m \leq 1,0000125$

Med samme teknik kan man vise:
En TM-zone for hele DK (undtagen Bornholm) giver
$0,9999 \leq m \leq 1,0001$

Zonebredde og målforhold. Hele zoner - fra Ækvator

Se i stedet på Mercatorprojektionen og udregn zonebredder onkring Ækvator. Målforhold

$$m(\lambda, \varphi) = \frac{k}{\cos \varphi}$$

- Med UTM nøjagtighedskravene: $k = 0,9996$, $m(\varphi) = \frac{0,9996}{\cos \varphi}$, $\varphi_{max} = 2,29^\circ$, Zonebredde $2x255km$. OBS: UTM-zoner er 3° brede. Nøjagtighedskrav kun opfyldt nord og syd for $\varphi = \pm 40^\circ$
- Med System 34 kravene $k = 0,99995$ $m(\varphi) = \frac{0,99995}{\cos \varphi}$, $\varphi_{max} = 0,81^\circ$, Zonebredde $2x90km$.
- DKTM/ETRS89 kravene $k = 0,99998$ $m(\varphi) = \frac{0,99998}{\cos \varphi}$, $\varphi_{max} = 0,51^\circ$, Zonebredde $2x57km$.

Optimale stereografiske projektioner

$$(\lambda, \varphi) \to \frac{2k\cos\varphi}{1+\sin\varphi}(\cos\lambda, \sin\lambda)$$

Målforhold

$$m(\varphi) = \frac{2k}{1+\sin\varphi}$$

- $0,99995 \leq m \leq 1,00005$ medfører maksimal radius 127km. Afstanden fra Skagen til Gedser er $335km > 2x127km$, i.e., mindst to zoner nødvendige til dækning af DK-Bornholm.

Hvad siger matematikken

Chebyshev (1821-1894) og D.A. Grave

Der findes netop en optimal konform projektion for et givet område på en kugleflade.
Den har konstant målforhold på randen af området

Optimal betyder her, at $m_{max} = 1 + \varepsilon$, $m_{min} = 1 - \varepsilon$ og ε er mindst mulig.(D.A. Grave, "On the fundamental problems of the mathematical theory of constructing geographical maps" , Handbook math. libr. (1896) (På russisk!!)) Andre kriterier: Minimer den *samlede forvanskning* - integralet af $|m(\lambda, \varphi) - 1|$ eller $(m(\lambda, \varphi) - 1)^2$ eller...

Konsekvens

Den bedste projektion for et givet område skal vælges efter faconen på området.

Eksempel

For et område med en cirkel som rand er stereografisk projektion optimal.

Eksempel

For et langstrakt område a la Jylland kunne Transversal Mercator være et godt bud.

For områder, der ligger skævt i forhold til meridianer og paralleller kunne en skæv Mercator være en mulighed.

System 34

Historie:

- 1903, Landbrugsministeriet kræver $\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-5}$ i nye matrikelkort. (ε mindre end måleusikkerheden)
  Før det: Generalstabens konforme kegleprojektion, $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-4}$.
- Problem: Omregning vil være et stort arbejde.
- 1928 Geodætisk Institut oprettes (Generalstabens topografiske afdeling + Den danske Gradmåling) Under Forsvarsministeriet. *Geodætisk Institut har til opgave at udføre geodætiske videnskabelige arbejder, udgive geodætiske publikationer, bestride landets opmåling samt udgive kort over riget. Det påhviler endvidere institutet at forsyne hæren med fornødent kortmateriale.*
- 1929 Kommission nedsættes $\rightsquigarrow$ System 34.

Definition af System 34

1. Konformt
2. To Zoner
3. I Zone 1 er målforholdet
   $m(u,v) = 0{,}99995 + 122{,}586 \cdot 10^{-16}(v - 265000)^2$ (v i meter)
4. I Zone 2 er $m(u,v) = 0{,}999978 + 122{,}608 \cdot 10^{-16}(v - 119000)^2$
5. Agri Baunehøj har koordinater $(200000m, 200000m)$ i *begge zoner* (Samme som i Generalstabens eksisterende kort.)
6. Retningen Agri $\rightarrow$ Lysnet er $24°31'14{,}17''$ (Som i Generalstabens eksiterende kort)

Punkt 5 og 6 definerer et koordinatsystem, når man har lavet projektionen.
2 og 3 bestemmer målforholdet som en funktion af koordinater i kortet.

Sidste gang: Tranversal Mercator for ellipsoiden

Krav:

- Konform
- m konstant langs λ_0-meridian
- m er en funktion af *afstanden til* λ_0*-meridianen*

Krav til målforhold + konformitet.
I Karsten Jensens kursus har I brugt afstandskorrektion til afstanden mellem (N_1, E_1) og (N_2, E_2), hvor E_0 er falsk Easting, altså Easting for midtemeridianen:

$$ppm_{sys} = 1 - \sigma$$

$$\sigma = m_0 + \frac{m_0}{6R_m^2}((E_1 - E_0)^2 + (E_1 - E_0)(E_2 - E_0) + (E_2 - E_0)^2$$

Afstandskorrektion er altså udtrykt i kortets koordinater. Ikke i (λ, φ)

Hvad siger matematikken?

- Kan man definere en konform projektion ved dens målforhold?
- Målforhold som funktion af koordinaterne i kortet??
- Og hvad er afstandskorrektionen, når målforholdet er kendt?

Målforhold for en konform projektion

J. Milnor, 1969 - Milnor fik Abelprisen i 2011!

Hvis $m_1(\lambda, \varphi)$ er målforhold for en konform projektion, opfylder m_1 den partielle differentialligning:

$$\frac{\partial^2}{(\partial\varphi)^2}(\ln(m_1(\lambda,\varphi)) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\ln(m_1(\lambda,\varphi)))\tan\varphi$$

$$+\frac{1}{(\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2}{(\partial\lambda)^2}(\ln(m_1(\lambda,\varphi))) = R^2$$

Og omvendt

Hvis en funktion $m(\lambda, \varphi)$ opfylder denne ligning, så findes der en (og kun en) konform projektion, som har m som målforhold. (Kun en bortset fra, at man selvfølgelig kan skubbe rundt med koordinatsystemet i planen.)

Målforhold for en konform projektion

Hvis $m_2(x, y)$ er målforhold for en konform projektion udtrykt i kortets koordinater, så opfylder m_2 ligningen

$$m_2(x,y)^2 \left[\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}(\ln(m_2(x,y))) + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2}(\ln(m_2(x,y))) \right] = \frac{1}{R^2}$$

Og omvendt

Funktioner, der opfylder den ligning, *er* målforhold for en konform projektion.

Man *kan* altså definere en konform projektion ved at give dens målforhold. MEN det er ikke alle funktioner, der er målforhold for en konform projektion.

Konsekvens for System 34

Man kan definere en konform projektion ved at give dens målforhold. MEN det er ikke alle funktioner, der er målforhold for en konform projektion. $m(x, y) = a + bx^2$ opfylder IKKE ligningen.
Og det er ifølge de oprindelige specifikationer målforholdet i de konforme projektioner i System 34!!!!

- I Zone 1 er målforholdet $m(u, v) = 0,99995 + 122,586 \cdot 10^{-16}(v - 265000)^2$
- I Zone 2 er $m(u, v) = 0,999978 + 122,608 \cdot 10^{-16}(v - 119000)^2$

Egenskaber ved transversal Mercator

- Konform
- Målforhold afhænger kun af *afstand til midtelinjen* - af Eastingkoordinaten.
- Midtelinjen er en meridian
- Koordinatnettet (Northing,Easting) koordinaterne måler Northing parallelt med Midtelinien, Easting parallelt med Ækvator.

Om målforhold for Transversal Mercator

Med kuglefladen som reference:

$$m(\lambda, \varphi) = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2(\lambda - \lambda_0)}}$$

Som funktion i kortet:

$$m(N, E) = c + \frac{c(E - E_0)^2}{2R^2} + \frac{5c(E - E_0)^4}{24R^4} + \frac{\cdots(E - E_0)^6}{6!R^6} +$$

$$\cdots + \frac{\cdots(E - E_0)^{2n}}{(2n)!R^{2n}}$$

OBS: De første to led som i System 34!

Transversal Mercator fra ellipsoide:

Igen er

$$m(N,E) = c + \frac{c(E-E_0)^2}{2R^2} + \frac{5c(E-E_0)^4}{24R^4} + \frac{\cdots(E-E_0)^6}{6!R^6} + \cdots + \frac{\cdots(E-E_0)^{2n}}{(2n)!R^{2n}}$$

hvis man vælger R rigtigt...

Approksimer ellipsoiden med en kugleflade i det område, der projiceres. Kuglefladen har radius $\sqrt{NM}$, hvor

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

$$M = \frac{a^2b^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$R(\varphi)^2 = NM = \frac{a^4b^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2}$$

Målforhold for TM på ellipsoide

$$R(\varphi)^2 = \frac{a^4 b^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2}$$

$$= \frac{a^4 b^2}{((a^2 - b^2)\cos^2\varphi + b^2)^2}$$

$$R(\varphi) = \frac{a^2}{b^2(e'^2\cos^2\varphi + 1)}$$

hvor $e' = \frac{a^2-b^2}{b^2}$ Man vælger φ midt i området - middelbredden.
For GRS80 ellipsoiden:

$$a = 6.378.137m, b = 6.356.752,3m$$

Middelradius i DKTM-zonerne:

- DKTM1 og DKTM 2 $R_m = 6386228m$ (samme middelbredde)
- DKTM3 $R_m = 6385670m$ (middelbredden mindre end i Zone 1 og 2)
- DKTM4 $R_m = 6385529m$ (middelbredden mindre end i Zone 3)

System 34 *ligner* Transversal Mercator, men

- midtelinjer er ikke meridianer (pga. valget af vinklen Agri- Lysnet)
- System 34 er ikke rigtig konform
- Målforholdet *kunne* svare til de to første led i Taylorudvikling af målforhold for transversal Mercator, men System 34 er ikke lavet som en TM.

DKTM/ETRS89

Fra høringsbrevet:

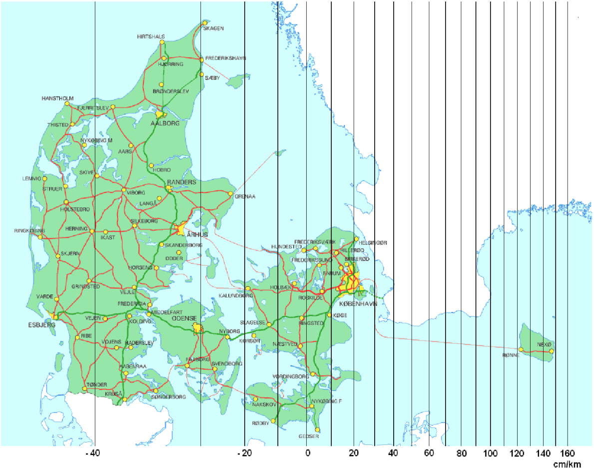
Fra processens begyndelse har der været påpeget dilemmaerne omkring håndtering af afstandskorrektionen i UTM-projektionen. Erfaringerne har vist, at faggrupper uden indgående kendskab til koordinatsystemer er kommet til at anvende data modtaget i UTM i CAD-systemer - uden en forudgående transformation til et system uden afstandskorrektion. Det har hidtil været anbefalet, at bygge-, anlægs- og opmålingsbranchen kunne anvende "sekundærsystemet" KP2000 til bygge- og anlægsprojekter. Men KP2000 har ikke vundet indpas.

Fra Notat om DKTM/ETRS

Krav:

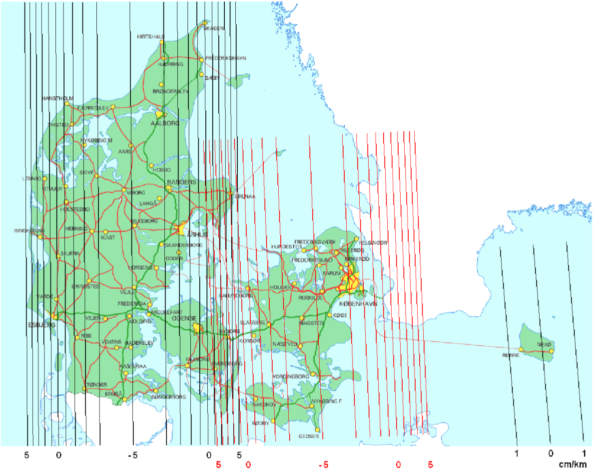
- Koordinaterne adskiller sig væsentligt fra UTM
- Zonerne er identificerbare ud fra koordinater
- Få zoner med mindre overlapsproblemer
- Lille (ubetydelig) afstandskorrektion på maksimum 2 cm/km

UTM zone 32 / (EUREF89)
Afstandskorrektion



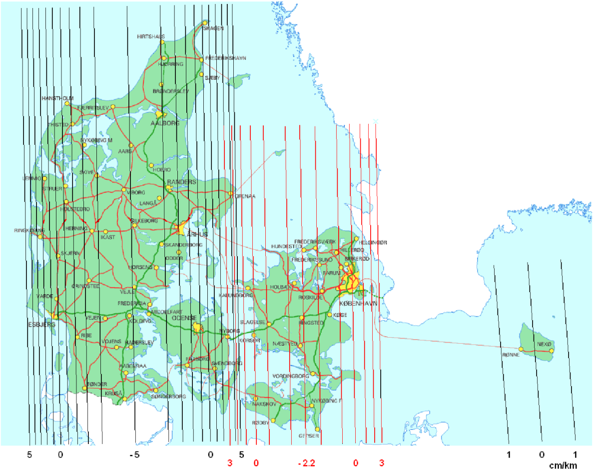
KP 2000 J - KP 2000 S - KP 2000 B

Afstandskorrektion



System 34 J - System 34 S - System 45

Afstandskorrektion



DKTM/ETRS89

Transversale Mercatorprojektioner

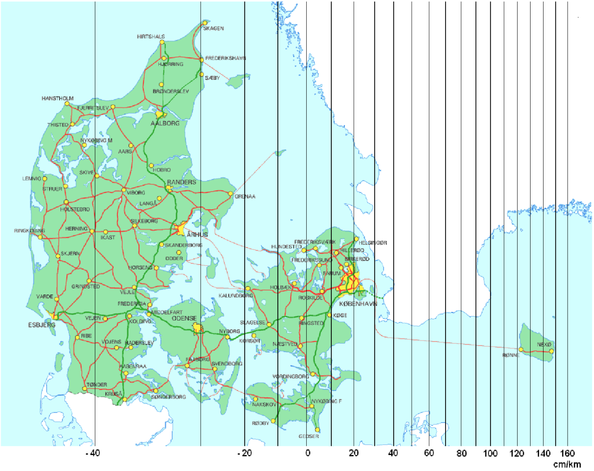
4Zoner

Zone	*Midtemeridian*	*Målforhold*	*False Easting*
DKTM1	9°	$c = 0,99998$	$200000m$
DKTM2	10°	$c = 0,99998$	$400000m$
DKTM3	$11,75^\circ$	$c = 0,99998$	$600000m$
DKTM4	15°	$c = 1$	$800000m$

Falsk Northing $-5000000m$ i alle zoner - i.e., Ækvator har Northingkoordinat $-5.000.000m$.

I UTM har Ækvator Northingkoordinat $0m$, så koordinater kan let skelnes.

UTM zone 32 / (EUREF89)
Afstandskorrektion



Transversal Mercator fra ellipsoide:

Igen er

$$m(N,E) = c + \frac{c(E-E_0)^2}{2R^2} + \frac{5c(E-E_0)^4}{24R^4} + \frac{\cdots(E-E_0)^6}{6!R^6} + \cdots + \frac{\cdots(E-E_0)^{2n}}{(2n)!R^{2n}}$$

hvis man vælger R rigtigt...

Afstandkorrektion - via approksimation af målforholdet

Med håndkraft - på tavle

Afstandkorrektion - for System 34 og TM

Hvis (anden ordens Taylor approksimation af) målforholdsfunktion $m(y,x) = m_0 + Q(x - x_0)^2$ udregnes afstandskorrektion til afstand mellem $(y_1, x_1))$ og (y_2, x_2) således:
Parameterfremstilling for linjen $\gamma(t) = (y_1, x_1) + t\frac{(y_2 - y_1, x_2 - x_1)}{d}$.

$$m(\gamma(t)) = m_0 + Q(x_1 + \frac{t(x_2 - x_1)}{d} - x_0)^2$$

$$d - D = \int_0^d (m(\gamma(t)) - 1 dt = \int_0^d (m_0 - 1) + Q(x_1 + \frac{t \cdot (x_2 - x_1)}{d} - x_0)^2 dt$$

Afstandkorrektion - for System 34 og TM

$$d - D = \int_0^d (m_0 - 1) + Q(x_1 + \frac{t \cdot (x_2 - x_1)}{d} - x_0)^2 dt$$

$$= (m_0 - 1)d + Q \int_0^d (x_1 + \frac{t \cdot (x_2 - x_1)}{d} - x_0)^2 dt$$

$$= (m_0 - 1)d + Q \int_0^d (x_1 - x_0)^2 + 2 \cdot \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}{d} t + \frac{(x_1 - x_2)^2}{d^2} t^2 dt$$

$$= d[(m_0 - 1) + \frac{Q}{3}[(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (x_2 - x_0)^2]]$$

For DKTM:

$$d(-0.00002 + \frac{0.99998}{6R^2}[(E_1 - E_0)^2 + (E_1 - E_0)(E_2 - E_0) + (E_2 - E_0)^2])$$

OBS: Her er ikke indregnet højde over ellipsoiden. Mere om det næste gang...