Kortprojektioner L4 2017
6.mm Referencesystemer. Ellipsoider og geoider. Ombecifring. Helmerttransformation.

Lisbeth Fajstrup & Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 maj 2017

Sidste gang

- Konstruktion af kort - System 34 og TM
  - Hvis man kender målforhold for en konform projektion, kan man finde projektionen
  - Ikke alle funktioner er målforholdsfunktioner. (Eksempelvis er konstant målforhold ikke muligt.)
  - Målforholdet for en TM er

$$m(N,E) = c + \frac{c(E-E_0)^2}{2R^2} + \frac{5c(E-E_0)^4}{24R^4} + \frac{\cdots(E-E_0)^6}{6!R^6} + \cdots + \frac{\cdots(E-E_0)^{2n}}{(2n)!R^{2n}}$$

hvor $R = R_m = \frac{a^2 b}{((a^2-b^2)\cos^2\varphi_m + b^2)}$ og φ_m er middelbredden i området.

  - Approksimativt $m(N,E) = c + \frac{c(E-E_0)^2}{2R^2}$.

Afstandskorrektion

- Afstandskorrektion
  - målforholdet giver information i et punkt af gangen.
  - Man integrerer - kurvelængde er et integral.
  - Flere kurver i spil: Storcirkel, billede af storcirkel, linje i planen, kurve på kuglen svarende til linjen.
  - Med målforhold $m(y, x) = m_0 + Q(x - x_0)^2$ er afstanden mellem $p = (y_1, x_1)$ og $q = (y_2, x_2)$ i kortet d, i naturen S.
    $d - S \sim d_D \sim d[(m_0 - 1) + \frac{Q}{3}[(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (x_2 - x_0)^2]]$
  - For DKTM er *approksimationen* ($R = \sqrt{MN}(\varphi)$, ϕ er middelbredden.):

$$d(-0.00002 + \frac{0.99998}{6R^2}[(E_1 - E_0)^2 + (E_1 - E_0)(E_2 - E_0) + (E_2 - E_0)^2])$$

  - Der er andre *approksimationer* til målforhold og afstandskorrektion. Når $E - E_0$ er stor i forhold til R, bliver fejlene betydelige. Implementation afvejer præcision og hastighed af beregninger - og zonebredde. Se eksempelvis C.F.F. Karney *Transverse Mercator with an accuracy of a few nanometers*. Journal of Geodesy, 2011 Vol 85, No 8.

Målforhold - igen

- For punkter på ellipsoiden (hørende til kortet) benyttes formalisme som ovenfor.
- For punkter på geoiden (eller over) er der to skridt; Først *transformeres til ellipsoiden*. Så bruges ellipsoide $\leftrightarrow$ kort som ovenfor.
- Fra geoide til ellipsoide - se Karsten Jensens slides. Størrelsesorden: med højde h over ellipsoiden skaleres med

$$\mu = \frac{R}{R+h}$$

hvor $R = \sqrt{NM}(\varphi) \sim 6386000m$. Med $h = 50m$ ($H = 10m$) får jeg $\mu = 0,99999217$. På midtemeridianen af en DKTMzone i højde $h = 50$ er skaleringen altså $0,999972 < 0.99998$. Mere præcise tal hos Karsten...

Vinkelkorrektion

Om vinkler:

- Vinkler skal korrigeres - også i et konformt kort!!
- Azimuthvinkler (vinkel med nord i naturen) er ikke vinklen med “opad” i kortet, da
  - Meridianer afbildes ikke til linjer parallelle med midterlinjen
  - Storcirkler afbildes ikke til linjer.
- Vinkelsummen i en trekant på kuglefladen er ikke π. Konsekvens: Forskellig azimuthvinkel “fra station 1 til station 2” og “fra station 2 til station 1”.

Modellering af Jorden

- **Fysik:** Tyngdekraft omvendt proportional med afstand.
- Eksempel: Planeter og Solen.
- Jorden og os på den - tyngdepotentialet i et punkt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$W(p_0) = \iiint_{Jorden} \frac{\rho((x,y,z))}{|p_0 p|} dv + \frac{\omega_e}{2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

- dv er et volumenelement, $\rho(x,y,z)$ er massefylden i $p = (x,y,z)$, $|p_0 p|$ er afstand fra p til p_0, ω_e er vinkelhastigheden af Jordens rotation. Og $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ er afstanden fra p_0 til Jordens omdrejningsakse. (Vi har placeret z-aksen i omdrejningsaksen.)

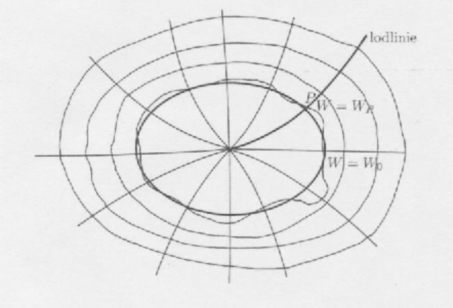
W er en funktion af 3 variable: $W : R^3 \to R$
Geoiden er en niveauflade for W - en *ækvipotentialflade*. Svarende til middelvandstanden.
Tyngdekraften er gradienten af W:

$$\vec{g}(x, y, z) = \nabla W(x, y, z)$$

- $\vec{g}$ peger i retning af maksimal ændring af W. (Da det er en gradientvektor).
- $\vec{g}(x, y, z)$ står vinkelret på tangentplanen til $W(x, y, z)$

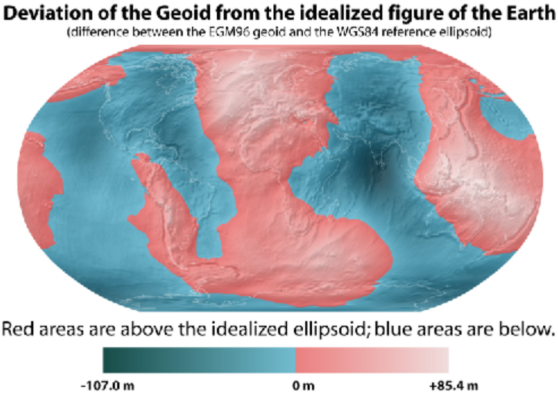
Funktioner, niveauflader gradientvektorer

Lodlinjen er ikke en linje



Geoiden er ikke en "pæn" flade

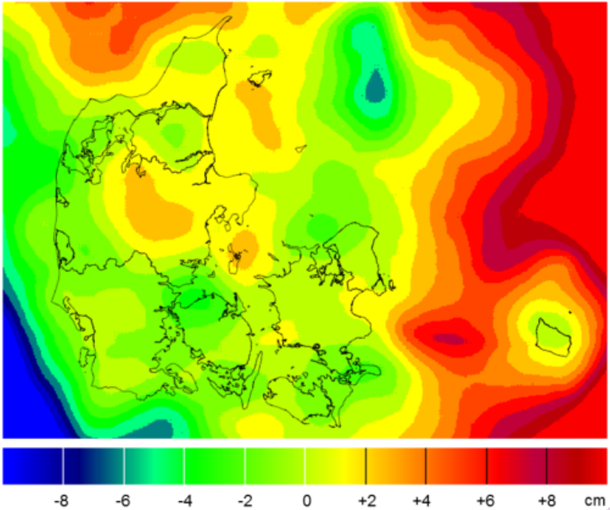
EGM96 geoiden i forhold til WGS84 ellipsoiden



Fra Wikipedia en.wikipedia.org/wiki/Geoid I Danmark afviger geoiden ca. 40 m fra WGS84 ellipsoiden.

Den danske geoide

Ny geoidemodel i Danmark i 2013. IKKE et nyt DVR90; en opdatering af højdedata i DK i forhold til GPS data. Så GPS højder passer bedre med målte koter. Afvigelse fra 2001-geoiden:



Ellipsoideparametre

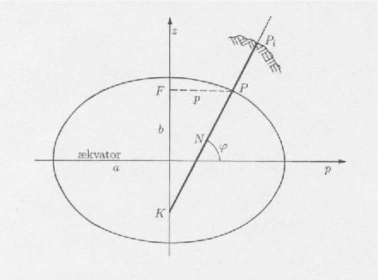
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N(1-f^2)+h)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

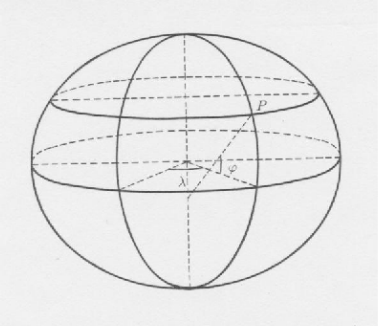
$$f = \frac{a-b}{a}, \textit{fladtrykningen}$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

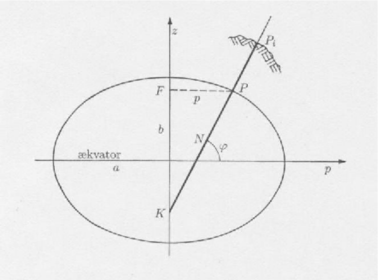
$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. eccentriciteten.
OBS: N afhænger af φ

- 3D-systemer: (X, Y, Z) eller (λ, φ, h)


z
P_i
F
p
P
b
N
φ
ækvator
a
p
K


P
λ
φ

Ellipsoideparametre



Storakse med længde $2a$ og lilleakse med længde $2b$

Fladtrykning $f = \frac{a-b}{a}$

(Første) Eccentricitet $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$

Anden eccentricitet $e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$

Ellipsens parametre er sædvanligvis a, f - man kan så udregne b, e etc.

Forskellige referenceellipsoider

Ellipsoide	Datum/system	Halv storakse a	1/fladtrykningen
WGS84		6378137	298,2572236
GRS80	EUREF89,ITRF	6378137	298,2572221
Hayford	ED50	6378388	297,0

Placering af ellipsoiden

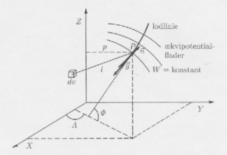
- Hvor skal man begynde...
- Hvilket område skal approksimeres?

Astronomiske koordinater

Lodlinjens retning:

$$\vec{g} = -g\vec{n} = -g \begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Lambda \\ \cos\Phi\sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix}$$

$\vec{g}$ og koordinaterne Φ og Λ kan bestemmes astronomisk - i forhold til stjerners placering (og hvad klokken er...). De henviser ikke til en referenceflade, men er fysiske størrelser. Man *vælger* Λ_0, z-aksen er rotationsaksen og Ækvator er astronomisk bestemt.



ED50

- God approksimation i Europa.
- Ellipsoide - Hayford = Internationale 1924. $a = 6378388,0m$, $1/f = 297,0$
- Placering ved fastsættelse af $\Phi - \phi$ og $\Lambda - \lambda$ og $H - h$, hvor H er højden over geoiden. I punktet Helmertturm i Potsdam.

Ellipsoiden samt dens placering udgør et datum, Europæisk Datum 50.

WGS84 -EUREF89-ETRS89

- God approksimation globalt.
- Ellipsoide, GRS80 $a = 6378137m$, $1/f = 298,2572221$
- Placering med centrum i Jordens massemidtpunkt. (For ED50 er der ca. 167 m mellem Jordens og ellipsoidens centrum).
- Akse - Jordens rotationsakse, men denne er ikke konstant.
- International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS.org, koordinerer og leverer data.
- ITRF, International Terrestrial Reference Frame er et antal punkter med (x, y, z)-koordinater i systemet. Disse opdateres - grundsystemet er fra 2008. Se http://itrf.ensg.ign.fr/ men der er residualer - opdatering efter e.g. jordskælv
- Kontinentaldrift $\rightarrow$ punkter flytter sig.
- Udmøntningen/realisationen i Europa kaldes ETRF89 eller EUREF89.

Galileo - GTRF

Meget tæt på ITRF Afvigelse af størrelsesorden max 0.3 mm.
Se http://www.navipedia.net/ under Reference Frames in GNSS

ETRS stationer

ETRS 89 er defineret udfra koordinater til fysiske stationer *til et givet tidspunkt* - konkret 1/1-1989.
8 permanente GPS reference stationer i DK. Heraf indgår 3 i ETRS89
Nettet fortættes i DK - REFDK - 95 punkter *udmøntningen af ETRS89 i DK.* 10 km-nettet er en yderligere fortætning - 700 punkter.
3D-koordinater. Og DVR90 koter. UTM-ETRS89 koordinater.

Systemer i Danmark

- ED50 (λ, φ, h),
- ETRS89/EUREF89 (λ, φ, h) og (X, Y, Z)
- Højder:
  - Ellipsoidehøjder h_{ED50}, h_{ETRS89}
  - DNN-højde (Århus Domkirke 5,570m)
  - DVR90 højde (Århus Domkirke 5,6150m). Geoidemodel dvr90g2013.01 erstatter dvr90g2002.01
- Kort:
  - System 34, System 45(Bornholm), (Tidligere også System Ostenfeld (Sønderjylland) (y, x))
  - UTM_{ED50}, UTM_{ETRS89}, $(N, E)_{xx}$
  - KP2000, 3 Zoner, (N, E) (stort set ikke i brug.)
  - DKTM, 4 zoner, (N, E)
  - Søkort i Mercatorprojektion.

3D eller 2D+1D

Koordinater for et punkt - eksempler:

1. $(X, Y, Z)_{ETRS89}$
2. $(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89}$, $(\lambda, \varphi, h)_{ED50}$
3. $(N, E)_{ETRS89}$, H_{DVR90}
4. $(N, E)_{ED50}$, H_{DVR90}
5. $(N, E)_{ETRS89}$, H_{DNN}
6. $(N, E)_{ETRS89}$, h_{ETRS89} (ellipsoidehøjden)

1) og 2) er 3D-systemer. De andre er 2D+1D. ($\neq$ 3D!!)

Omregning/ombecifring

- Skift af datum 3D
- Skift af kort 2D
- Skift af højdesystem. 1D

Transformationer af 3D-systemer - alle tre koordinater på en gang.

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{WGS84} = kR\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ED50} - \vec{w}\right)$$

R er en rotationsmatrix

Omregning fra ETRS89 til ED50

$$(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{ETRS89} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{ED50} \leftrightarrow (\lambda, \varphi, h)_{ED50}$$

Afbildningen mellem $(X, Y, Z)_{ETRS89}$ og $(X, Y, Z)_{ED50}$ ("teknisk koordinatsystem" - man bruger ikke de koordinater ellers) er en Helmerttransformation - en 7-parametertransformation.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ED50} = kR^{-1}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{EUREF89} - \vec{w}\right)$$

R (og R^{-1}) er en rotationsmatrix.

Kartesiske til geografiske koordinater på ellipsoiden

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N(1-f)^2+h)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Z + Nf(2-f)\sin\varphi}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$h = \sqrt{(Z + Nf(2-f)\sin\varphi)^2 + (X^2+Y^2)} - N$$

Iterative algoritmer.

Helmerttransformationer

$$kR^{-1}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{EUREF89} - \vec{w}\right)$$

7 parametre?

7 parametre!

$R =$

$$\begin{pmatrix} \cos r_z & \sin r_z & 0 \\ -\sin r_z & \cos r_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r_y & 0 & -\sin r_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin r_y & 0 & \cos r_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r_x & \sin r_x \\ 0 & -\sin r_x & \cos r_x \end{pmatrix}$$

$1/k = 1,0 - 0,540645 \cdot 10^{-6}$
$\vec{w} = (-81,0703m, -89,3603m, -115,7526m)$, $r_x = -0,48488''$,
$r_y = -0,02436''$, $r_z = -0,41321''$

Helmerttransformationer

Bruges også i Fotogrammetri: Omregning fra et billedplan til et andet - i forskellige kamerapositioner

$(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89} \to (N, E)_{ED50}$

$$(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89} \to (X, Y, Z)_{ETRS89} \to (X, Y, Z)_{ED50} \to$$
$$(\lambda, \varphi, h)_{ED50} \to (N, E)_{``tekniksystem''} \to (N, E)_{ED50}$$

Den sidste afbildning er en korrektion, som skyldes, at ED50 ikke er indmålt så præcist som ETRS89. Det er to 15. grads polynomier. Samlet fejl ca. 1,6 cm.

Prediktioner

Polynomiet $(N, E)_{``teknisksystem''} \to (N, E)_{ED50}$ er lavet som en prediktion.
Omregninger fra e.g. GTRF (reference for Galileo) og PZ-90 (reference for GLONASS) er også lavet som en prediktion
Givet kendte koordinater for et antal punkter i.e., omregningen kendt i et antal punkter.
Find polynomier, der passer i de punkter - $(x, y) \to (p_1(x, y), p_2(x, y))$
For omregning mellem referencesystemer: Find en Helmerttransformation, der passer

Prediktioner

Hvis p_1 og p_2 er 2. grads polynomier er der 6 koefficienter i hvert - 12 ialt - en 12-parameter-transformation.

$$p(x,y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

Fitning til kendte punkter - i.e. kendte værdier for $p_1(x_k, y_k)$ og $p_2(x_k, y_k)$ giver *ligninger for koefficienterne.*
I et n'te grads polynomium med to variable er der $1+2+3+\ldots+n+1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ koefficienter.
Muligvis vægtning af punkterne - statistiske metoder...
Omregning fra ETRS89 (og dermed fra GPS) til System 34 er også en prediktion.

Prediktioner

Hvis vi ved, $(x, y) \to p(x, y) = (x_1, y_1)$ er rotation, skalering og translation:

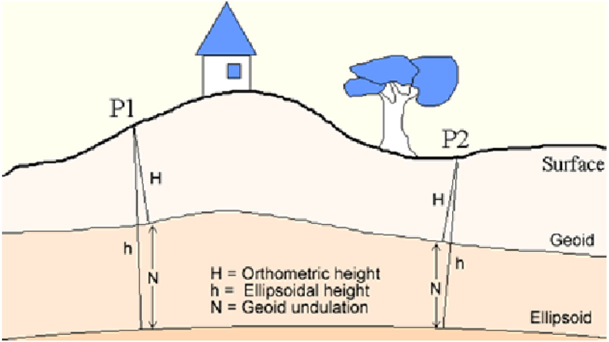
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

så er det en Helmerttransformation i 2D, 4 parametre: t_1, t_2, k, α

Transformation af 2D +1D

Kortets koordinater for sig og højder for sig.
Højdesystemer

- Højde over en af ellipsoiderne.
- Højde over geoiden - DVR.
- Højde over den “gamle” geoide DNN.



Fra kartoweb.itc.nl af R. Knippers , A.Mehlbreuer Geoidehøjden (geoideundulationen) er ca 3 m. med den gamle (ED50) ellipsoide), ca 40 m. med den nye.

Højder

- Danmark vipper: Højdeændring i Sønderjylland (1891-1990) -1,5mm/år (nedad), i Botniske bugt: 9mm/år, opad.
- DVR90 er middelvandstanden i 1990.
- Referencenet - 3000 punkter præcist nivelleret.
  Fortættet til 67000 punkter.
- DNN, Dansk Normal Nul, defineret i 1950'erne.

2Dnet

2km nettet eller triangulationsnettet.

- 2 km net der giver plane koordinater (2D). 22000 punkter der definerer System 34 og UTM-ED50.