LISBETH FAJSTRUP.
IVER OTTOSEN.

Analytisk beskrivelse af egenskaber ved kort - første fundamentalform og forvanskninger.

- Konformitetskrav $\rightsquigarrow$ forvanskninger
- Mål: Analytisk beskrivelse af Jorden, af kortet, af projektionen.
- Kurvelængder, målforhold.
- Den "krumme Pythagoras": 1.fundamentalform. Interpretation af størrelserne E, F, G.
- Målforhold og første fundamentalform.

Litteratur:

- Kortprojektioner Kapitel 6. Orienter jer om parameterfremstillinger for kurver, kurvelængde, kædereglen og partielle afledte i calculusbogen fra første studieår.

Hjemmeopgaver.

(1) Skriv $x^2 + 4x + 4$ som kvadratet på en to-leddet størrelse.
(2) Udregn $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 4x + 4}dx$. (Facit: $\frac{21}{2}$)
(3) Differentier funktionerne e^{3x}, x^7, $\cos x$. (Facit: $3e^{3x}$, $7x^6$, $-\sin x$.)
(4) Find stamfunktioner til funktionerne i opgave 3. (Facit: $\frac{1}{3}e^{3x}$, $\frac{1}{8}x^8$, $\sin x$.)
(5) Udregn de partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ af $f(x, y) = x^3 + xy + 3e^y$. (Facit:$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3e^y$.)
(6) Udregn $\int_0^3 \int_1^2 4xy \; dxdy$. (Facit: 27)

Opgaver. Temaet er kurvelængde og målforhold. Det er vigtigt, at I forstår, hvad I regner ud - og ikke bare læser facit højt for hinanden...

(1) Bestem længden af kurverne givet ved de følgende formler - og I må godt bruge Maple eller andre redskaber til at regne integraler ud:
   (a) $(x, y) = (t^2, \frac{2}{3} \cdot t^3 - \frac{1}{2} \cdot t), 0 \leq t \leq 2,$ (Facit: $\frac{19}{3}$)
   (b) $y = \sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 5$ OBS: Husk at lave en parameterfremstilling. (Facit: $\frac{335}{27}$)
(2) Overbevis hinanden om, at $\alpha(t) = (\cos\lambda_0 \cos(t), \sin\lambda_0 \cos(t), \sin(t))$ er en parameterfremstilling for en meridian (en længdegrad), L_{λ_0}, med vinkel λ_0 på kuglen. (Vink: Meridianer svarer til fastholdt λ. Lad derfor parameteren t svare til φ i parameterfremstillingen for kuglen). Hvilket interval gennemløber t, når meridianen løber fra Sydpolen til Nordpolen?
   Find på samme måde en parameterfremstilling $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ for en breddecirkel B_{φ_0} (en parallel) med vinkel φ_0. Husk at fastlægge hvilket interval parameteren løber i for at komme fra datolinjen og løbe mod øst til I når datolinjen igen.
(3) Udregn koefficienterne til første fundamentalform, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ og $\tilde{G}$ for stereografisk projektion $f(\lambda, \varphi) = (2 \cdot \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \cdot \cos\lambda, 2 \cdot \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \cdot \sin\lambda)$. og målforholdet $m((\lambda, \varphi), \alpha)$

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
FREDERIKSKAJ 10A
2450 KØBENHAVN SV
9940 8848
9940 9989
FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
OTTOSEN@MATH.AAU.DK

Udregn omkredsen af en breddecirkel før og efter projektion.
Facit: $\tilde{E} = \frac{4\cos^2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$, $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = \frac{4}{(1+\sin\varphi)^2}$, $m((\lambda,\varphi),\alpha) = \frac{2}{1+\sin\varphi}$. Før projektion: $2\pi\cos\varphi$. Efter projektion: $\frac{4\pi\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$

(4) Archimedes' arealbevarende projektion er:

$$f(\lambda,\varphi) = (\lambda, \sin\varphi)$$

Udregn koefficienterne til første fundamentalform. Og målforholdet $m((\lambda,\varphi),\alpha)$. Hvad er længden af en meridian før og efter projektion? (Vink: Se det geometrisk.)
Facit: $\tilde{E} = 1$, $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = \cos^2\varphi$, $m((\lambda,\varphi),\alpha) = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\varphi\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$. Længden før er π. Længden efter er 2.

Næste gang. Længde- og vinkelmåling på flader. Forvanskning ved projektion. Kortprojektioner og Forvanskninger Kapitel 6 og 7.

Eksamensopgave 1. Mercatorprojektionen er bestemt ved, at et punkt med geografiske koordinater (λ,φ) afbildes i punktet

$$f(\lambda,\varphi) = (\lambda, \ln(\tan(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}))).$$

(1) Find, ved at bruge parameterfremstillinger for meridianer og breddecirkler p kuglefladen, parameterfremstillinger for billedet af en meridian L_{λ_0} og en breddecirkel B_{φ_0} ved denne projektion.
(2) Find længden af billedet af en breddecirkel. (Facit: 2π) Hvad er længden af en breddecirkel før projektion (Se opgave 1 fra første kursusgang) Facit: $2\pi\cos\varphi$ (Her sættes $R = 1$.)
(3) Find koefficienterne $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ til første fundamentalform.
(Vink: $\frac{d}{d\varphi}(\log(\tan(\pi/4+\varphi/2))) = \frac{1}{\cos\varphi}$)
Facit:$\tilde{E} = 1$, $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}$.
(4) Udregn målforholdet $m((\lambda,\varphi),\alpha)$.
Facit: $m(\lambda,\varphi),\alpha) = \frac{1}{\cos(\varphi)}$
(5) Udregn målforholdet
- På Ækvator.
- Når $\varphi = 3^\circ$ (Jeg får 1,00137)
- I en afstand på 100km fra Ækvator. (Jordens radius kan sættes til 6370km). (Jeg får 1,00012)
- I en afstand på 200km fra Ækvator. (Jeg får 1,00049)

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9220 AALBORG ØST | 9940 8848 | FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
9940 9989 | OTTOSEN@MATH.AAU.DK
FREDERIKSKAJ 10A
2450 KØBENHAVN SV

Venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup & Iver Ottosen

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
FREDERIKSKAJ 10A
2450 KØBENHAVN SV

9940 8848
9940 9989

FAJSTRUP@MATH.AAU.DK
OTTOSEN@MATH.AAU.DK