# Mat2-SUMA4
# Reelle og komplekse funktioner

## Skriftlig eksamen
## 11. juni 2007

Dato: 11. juni 2007

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

**Tilladte hjælpemidler** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet** findes på den næste side.

**Opgave 1.** En række af funktioner er givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin^n(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Vis, at rækken (1) konvergerer punktvis på $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
2. Vis, at rækken konvergerer uniformt på $[0, \frac{\pi}{4}]$.
3. Er rækken konvergent når $x = \frac{\pi}{2}$? Hvad med $x = \frac{3\pi}{2}$?

**Opgave 2.** Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{z(z - \pi^{\frac{1}{3}})^2}{\sin(z^3)}.$$

1. Gør rede for, at $h$ er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$.
2. Bestem nulpunkterne for $h$ og deres orden.
3. Bestem polerne for $h$ og deres orden.

**Opgave 3.** Lad $\partial B_1(0)$ være den positivt orienterede enhedscirkel med centrum i 0 og radius 1. Beregn integralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{z(z - \pi^{\frac{1}{3}})^2}{\sin(z^3)}\, dz,$$

ved at bruge residueregning.

**Opgave 4.** Der er givet en ligning

$$z = \cos(z) + \sin(x + y) \tag{2}$$

i de tre reelle variable $(x, y, z)$. Der er også givet et punkt $(x_0, y_0, z_0) = (3\pi/2, 0, 0)$.

1. Vis, at $(x_0, y_0, z_0)$ opfylder ligningen givet i (2).
2. Vis, at der findes en kontinuert differentiabel funktion $g(x, y)$ defineret i en åben mængde $U$, med $(x_0, y_0) \in U$, således at $g(x_0, y_0) = z_0$ og

   $$g(x, y) - \cos(g(x, y)) = \sin(x + y),$$

   for alle $(x, y) \in U$.
3. Bestem

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

4. Bestem ligningen for tangentplanen hørende til $z = g(x, y)$ i punktet $(x_0, y_0, z_0)$.