Opgave 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} x_1^2 + t x_2^3 = 4, \\ x_2^4 + x_1 x_2 = t - 1. \end{cases} \tag{1}$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (2, 0, 1)$ er en løsning. (2 point)

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0, der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (2, 0)$ og komponenterne $x_{1,2}$ er C^1 funktioner på T_0. (4 point)

c). Udregn $x_1'(1)$ og $x_2'(1)$. (4 point)

Opgave 2. Find Fourier udvikling af følgende funktion:

$$f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos^2(3x)\ .$$

(10 point)

Opgave 3. Følgen af funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2n+1}{2nx}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Udregn den punktvise grænseværdi af denne følge:

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Er f kontinuert? (6 point)

2. Konvergerer følgen uniformt? (4 point).

Vink: udregn $f_n(1/(\pi n))$ og $f(1/(\pi n))$ for hver n.

Opgave 4. Udregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

(10 point)