Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig eksamen
10. juni 2005

Dato: 10. juni 2005

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Er den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \sin(n^2)}$$
konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

2. Vis, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{2n}}$$
er absolut konvergent. Find summen af denne uendelige række.

3. Er den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$
konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes. *Vink*: Brug enten integralkriteriet eller sammenligningskriteriet.

Opgave 2. Lad $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$. En funktion $f\colon V \to \mathbf{R}^2$ er givet ved udtrykket
$$f(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{x}{x+y}).$$

1. Gør rede for, at f er differentiabel på V.

2. Find Jacobi-matricen og Jacobi-determinanten for f i alle punkter $(x, y) \in V$.

3. Gør rede for, at til ethvert $(x_0, y_0) \in V$ findes en åben mængde W, med $(x_0, y_0) \in W \subseteq V$, således at f er injektiv på W. Gør endvidere rede for, at den inverse funktion $f^{-1}\colon f(W) \to W$ er differentiabel, og find dens Jacobi-matrix.

Opgave 3. Vi definerer funktionen
$$h(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 5)}.$$

1. Gør rede for, at h er en meromorf funktion på $\mathbf{C}$.

2. Find polerne for h, og angiv ordenen af hver pol.

3. Gør rede for, at h ingen nulpunkter har.

4. Lad γ være cirklen $|z - 1| = 3$, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn integralet
$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$

Opgave 4. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+16} dx = \frac{\pi}{4} e^{-12},$$

ved at bruge residueregning.