Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig prøve-eksamen
6. juni 2005

Dato: 6. juni 2005

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker og potensrækker.

1. Er den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2n+1}$$
konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

2. Find konvergensradius af potensrækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

3. Vis, at den uendelige række
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{(n(n+1))^{1/3}}$$
er konvergent og find dens sum. Bemærk, at summationen starter med $n = 2$.

Opgave 2. En følge af funktioner $f_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ er givet ved
$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x^n}, \quad x \in [0,1].$$

1. Vis, at følgen $\{f_n\}$ er punktvis konvergent på $[0,1]$, og bestem grænsefunktionen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

2. Konvergerer følgen $\{f_n\}$ uniformt mod f på $[0,1]$?

3. Givet et a, $0 < a < 1$, vis, at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mod f på $[a,1]$.

Opgave 3. Der er givet et ligningssystem
$$\begin{aligned} 2x_1x_2 - t_1^2 + t_2^2 + t_2 &= 2, \\ x_1^2 - x_2^2 + 2t_1t_2 + t_1 &= -1, \end{aligned}$$
i de fire variable $(x_1, x_2, t_1, t_2) \in \mathbf{R}^4$.

1. Vis, at $(x_1, x_2, t_1, t_2) = (0, 1, 0, 1)$ opfylder ovenstående ligningssystem.

2. Gør rede for, at der findes en åben mængde $W \subseteq \mathbf{R}^2$ med $(0,1) \in W$ og en kontinuert differentiabel funktion $\mathbf{g} = (g_1, g_2)\colon W \to \mathbf{R}^2$, således at $x_1 = g_1(t_1, t_2)$ og $x_2 = g_2(t_1, t_2)$ opfylder ovenstående ligningssystem for alle $(t_1, t_2) \in W$, og også opfylder
$$g_1(0,1) = 0, \quad g_2(0,1) = 1.$$

3. Beregn de fire partielle afledede

$$\frac{\partial g_1}{\partial t_1}(0,1), \qquad \frac{\partial g_1}{\partial t_2}(0,1),$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial t_1}(0,1), \qquad \frac{\partial g_2}{\partial t_2}(0,1).$$

4. Funktionen $\mathbf{g}$ kan også opfattes som en kompleks funktion fra W til $\mathbf{C}$. Vis, at $\mathbf{g}$ er holomorf i $z_0 = i$.

Opgave 4. En kompleks funktion h er givet ved udtrykket

$$h(z) = \frac{z^2}{(z+2)^2}.$$

1. Vis, at h er meromorf på $\mathbf{C}$ med en pol i $z_0 = -2$ af orden 2. Bestem residuet $\mathrm{Res}(h, z_0)$.

2. Bestem eventuelle nulpunkter for h og deres orden.

3. Lad γ betegne den vej, som består i at gennemløbe cirklen $|z - 1 + i| = 2$ én gang i positiv omløbsretning. Beregn
$$\int_\gamma f(z)dz.$$

4. Find koefficienterne i Taylor-rækkeudviklingen af h omkring punktet $a = 0$. For hvilke z konvergerer denne Taylor-rækkeudvikling?