Dagens program: Invers og implicit funktionssætningerne er beskrevet på forrige spiseseddel. Denne gang vil fokus især være på implicit funktions sætningen:

Fra lineær algebra kan I beskrive løsningsmængden til en ligning $T(x) = b$, hvor $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineær afbildning. Det er et underrum af $\mathbb{R}^n$, med dimension $n - rang(T)$ eller n- "dimensionen af billedrummet for T".

Løsningsmængden til ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hvor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ er en kugleflade med radius 1. Kuglefladen kan lokalt betragtes som en graf - omkring et punkt, der ikke ligger på "Ækvator", kan vi beskrive den med $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ eller $(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Find selv på grafbeskrivelser - fra $x - z$-planen og fra $y - z$-planen. Vi kan altså udtrykke en af koordinaterne som en funktion af de to andre - den er implicit givet ved de to andre¿

Med $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ kan vi skrive ligningen $F(x, y, z) = 1$. Implicitfunktionssætningen giver en tilstrækkelig betingelse for, hvornår sådanne løsningsmængder lokalt kan betragtes som grafer - altså, en delmængde af de variable kan udtrykkes som en funktion af resten af de variable. Det afhænger af Jacobimatricen for F, og beviset anvender IFS.

En vigtig konsekvens af implicit funktionssætningen er implicit differentiation. Det formuleres præcist her, da det ikke står i bogen: Med notation fra sætning 17.6, i.e., $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ og $G : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^k$, hvor $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ for $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ er C^1. Da gælder:

$$0 = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) = [D_{\mathbf{x}}FD_{\mathbf{y}}F] \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ DG \end{bmatrix} = D_{\mathbf{x}}F + D_{\mathbf{y}}FDG$$

hvor $D_{\mathbf{x}}F$ er $k \times n$ matricen med de første n søjler fra DF og $D_{\mathbf{y}}F$ er $k \times k$ matricen med de sidste k søjler - som i Fitzpatrick side 450. På venstresiden står 0-matricen af dimension $k \times n$, da $F(x, G(x)$ er en konstant funktion af x. Man kan nu udnytte denne ligning mellem matricer til at finde $DG(\mathbf{x})$ *uden at finde* G. Husk, at $D_{\mathbf{y}}F$ er invertibel.

$$DG(\mathbf{x}) = -(D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})))^{-1}D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})$$

Antag eksempelvis, at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \mathbf{a}$ og at $D_{\mathbf{y_0}}F$ er invertibel i (x_0, y_0). Fra implicit funktionssætningen fås (på passende små omegne) $G(x_1, x_2, x_3) = (y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3))$, så $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, G(x_1, x_2, x_3))$ er en konstant fuktion af tre variable. Jacobimatricen for G er en 2×3 matrix og $DG(x_1, x_2, x_3) = -(D_{\mathbf{y}}F)^{-1}D_{\mathbf{x}}F$, hvor matricerne på højresiden skal evalueres i punktet $(x_1, x_2, x_3, G(x_1, x_2, x_3))$

Litteratur 17.1-17.2

08:15–08:45 Repetition i G5-112 af, hvad vi lavede sidst, og hvad vi manglede, herunder bevis for 16.11.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 LISBETH FAJSTRUP
9220 AALBORG ØST FAJSTRUP@MATH.AAU.DK

09:25–11:25 Opgaveregning (i grupperummene).

- 16.1.8, 16.1.9, 16.1.10, 16.1.11 , 16.1.13, 16.1.14

08:50–9:25 og 11:25–12:00 Forelæsning (i G5-112) over 17.1-17.2, om *implicit givne funktioner*.

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 LISBETH FAJSTRUP
9220 AALBORG ØST FAJSTRUP@MATH.AAU.DK