

Dagens program: Vi fortsætter studiet af uendelige rækker. Derefter ser vi på følger (og rækker) af funktioner.

At udregne summen af en uendelig række er oftest vanskeligt. Sidst så vi et eksempel, hvor man kan finde summen: geometriske rækker. Her er endnu et:

Sætning Hvis $\{a_n\}$ er en konvergent følge, da er

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k.$$

Bevis: Den n 'te afsnitssum er $s_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ hvor vi har "teleskoperet" leddene. Altså er $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. $\square$

Der er desuden et konvergenzkriterium, som bogen omtaler i opgave 9.1.7, men ikke i teksten:

Rodkriteriet: Rækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er *absolut konvergent*, hvis der findes r med $0 \leq r < 1$ og et $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n|^{1/n} < r$ for hvert $n \geq N$

En følge af funktioner, $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ med $E \subset \mathbb{R}$, konvergerer *punktvis*, hvis de reelle følger $f_n(x)$ er konvergente for ethvert $x \in E$. Punktvis konvergens er svag i den forstand, at der findes

- Følger af kontinuerte funktioner, der konvergerer punktvis til en diskontinueret funktion
- Følger af differentiable funktioner, der konvergerer punktvis til en ikke-differentiabel funktion.
- Følger af differentiable funktioner f_n , så $f_n \rightarrow f$ punktvis, f er differentiable, men f'_n konvergerer ikke til f'

Et meget bedre konvergensbegreb er *uniform konvergens*. Lad $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Følgen f_n konvergerer uniformt mod f på E , hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så for $n \geq N$ er $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ for ethvert $x \in E$. (Ja, det minder om uniform kontinuitet...)

En uniformt konvergent følge af kontinuerte funktioner har kontinuert grænsefunktion (7.9). En uniformt konvergent følge af integrable funktioner har integrabel grænsefunktion og integralet fås som grænsen for følgen af integraler $\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$ (7.10). For differentiable funktioner er det mere indviklet: Lad f_n være en følge af differentiable funktioner, som konvergerer i mindst et punkt $f_n(x_0) \rightarrow y$. Hvis de afledte konvergerer uniformt $f'_n \rightarrow g$, er følgen f_n uniformt konvergent med differentiable grænsefunktion, og $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)) = g(x)$ (7.12).

Litteratur: Fitzpatrick 9.2 og 9.3.

09:25–11:25 Opgaveregning (i grupperummene).

- 9.1.1 f)
- Vis, at følgende rækker konvergerer, og find deres sum:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{e^{k-1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\pi^{2k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{(k+2)(k+3)}$$

Jeg får hhv. $\frac{e}{1+e}$, $\frac{-\pi^2}{\pi^2+1}$, 1 og 4.

- 9.1.2
- 9.1.4

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup