

Dagens program: Vi fortsætter studiet af potensrækker.

En funktionsrække på formen $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ kaldes en *potensrække*. (med center i x_0). Potensrækker konvergerer naturligvis i $x = x_0$, og generelt findes et tal $R \in [0, \infty]$, så potensrækken er konvergent for $|x - x_0| < R$ og divergent for $|x - x_0| > R$. R kaldes *konvergensradius* for potensrækken. Hvis følgen $\{|a_k|^{1/k}\}$ konvergerer med $\lim |a_k|^{1/k} \in [0, \infty]$, så er $R = 1/\lim |a_k|^{1/k}$ (med konventionen $1/\infty = 0$ og $1/0 = \infty$). Indenfor konvergensradius konvergerer potensrækken uniformt: Hvis $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ konvergerer $S(x)$ uniformt på $[a, b]$. Desuden er $S(x)$ absolut konvergent for $|x - x_0| < R$.

Fra de tidligere resultater om uniform konvergens, får vi med $f(x) = S(x)$ for $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$:

f er kontinuert.

Konvergensradius for den ledvist differentierede potensrække $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ er R og

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

for $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Ved induktion ser man, at de højere afledte opfylder $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_k (x - x_0)^{k-n}$.

For $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ er

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} ((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1})$$

En funktion, der kan skrives som grænsefunktion for en potensrække $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ en *analytisk* funktion. Hvis konvergensradius $R < \infty$ siges f at være (reel) analytisk på intervallet $]x_0 - R, x_0 + R[$. (Senere vil vi tillade komplekse tal i potensrækkerne $\sum_{k=0}^{\infty} w_k (z - z_0)^k$.)

Da de afledte kan udregnes fra potensrækken, ser vi, at en reel analytisk funktion på $]x_0 - R, x_0 + R[$ er C^∞ og at koefficienterne til potensrækken med centrum i x_0 kan findes ved at udregne de afledte $f^{(n)}(x_0)$ (Taylorudvikling).

Weierstrass gav det første eksempel på en kontinuert, intetsteds differentielabel funktion. Sådanne funktioner optræder idag bl.a. som fraktaler. De konstrueres som en grænsefunktion for en uniformt konvergerende følge af kontinuerte funktioner (sikrer kontinuitet af grænsefunktionen).

Litteratur Fitzpatrick 9.5 til side 261 midt på (resten af kapitlet hører til miniprojektet.). Desuden 9.6.

Opgaveregning (i grupperummene). Husk at regne opgaver med rækker af tal.

- 9.4.1, 9.4.2,
- 9.5.1
- 9.5.2
- 9.5.3 (Vink: Sammenlign med 9.5.2 - hvad er den afledte?)

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup