Om konvergensradius og majorantkriteriet:
Jeg samlede nogle argumenter sammen til

Lemma 0.1. *Lad $S(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ Antag, der findes en konvergent række, $\Sigma_{k=0}^{\infty} M_k$ med positive led, så $|f_k(x)| \leq M_k$ for alle $x \in E$ ($\Sigma_{k=0}^{\infty} M_k$ er en* konvergent majorantrække*). Da er $\Sigma_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ uniformt og absolut konvergent på E.*

Bevis. $\Sigma_{k=0}^{\infty} M_k$ er konvergent og altså Cauchy: Givet $\varepsilon < 0$, findes $N \in \mathbb{N}$, så $\Sigma_{k=n}^{k=n+l} M^k < \varepsilon$ for $n \geq N$ og for alle $l \in \mathbb{N}$. Heraf følger, at $\Sigma_{k=n}^{k=n+l} |f_k(x)| < \varepsilon$ for $n \geq \mathbb{N}$, for alle $l \in \mathbb{N}$ og for alle $x \in E$ - i.e., afsnitsfølgen $s_n(x)$ opfylder Weierstrass' uniforme konvergenskriterie (9.29) på E. □

Eksempel 0.2. $S(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ og $M_k = Mr^k$, hvor $0 \leq r < 1$ (9.39).

Proposition 9.40 siger mere, end Fitzpatrick har med:

Proposition 0.3. *Lad x_0 være i konvergensområdet for $S(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ og lad $0 \leq r < |x_0|$. Da er $S(x)$, $\Sigma_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ og $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k k x^{k-1}|$ uniformt konvergent på $[-r, r]$*

Korollar 0.4. *Lad D være konvergensområdet for $S(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ og lad $R = \sup\{x | x \in D\}$, hvor vi sætter $R = \infty$, hvis D er ubegrænset. Da er $D = \mathbb{R}$, hvis $R = \infty$, $D = \{0\}$, hvir $R = 0$; ellers er D på formen $[-R, R]$, $]-R, R[$, $]-R, R]$ eller $[-R, R[$. R kaldes* konvergensradius *for $S(x)$.*

Proposition 0.5. *Med konventionen $\frac{1}{\infty} = 0$ og $\frac{1}{0} = \infty$ gælder*

- *Hvis $l = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ eksisterer, da er $R = \frac{1}{l}$.*
- *Hvis $a = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$ eksisterer, da er $R = \frac{1}{a}$*

Dagens program: Nu skal vi have styr på *Riemann-integralet*. Der er flere forskellige integralbegreber og mål og integrationsteori er et stort emne for sig selv. Intuitionen om "areal under kurven" er problematisk for mange funktioner, så der skal en mere præcis definition til.

På Mat2 holder vi os til Riemannintegralet for funktioner af en variabel. For et lukket begrænset interval, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ser vi på en opdeling i mindre intervaller, en *inddeling*, $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Hvis Q er en inddeling, som indeholder P, $P \subseteq Q$, kaldes Q en *forfining* af P. Q opstår ved først at underdele i punkterne specificeret af P og så (eventuelt) indsætte flere delepunkter.
To inddelinger P og P' har en fælles forfining $P \cup P'$ og når $\|P\|$ betegner længden af det største delinterval i P, gælder for $P \subseteq Q$ at $\|P\| \geq \|Q\|$ - jo finere inddeling, jo kortere er det største delinterval. Bemærk, at man godt

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 LISBETH FAJSTRUP
9220 AALBORG ØST FAJSTRUP@MATH.AAU.DK

kan have to inddelinger med $\|P\| < \|P'\|$, uden at $\|P\|$ er en forfining af P'.

For en *begrænset* funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ og en inddeling P, er *oversummen* $U(f, P)$ summen af alle $M_j(f)(x_j - x_{j-1})$, hvor $M_j(f)$ er supremum over $f(t)$ for $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Det er en sum af arealer af rektangler. Tilsvarende fås undersummen $L(f, P)$, som sum over $m_j(f)(x_j - x_{j-1})$, $m_j(f)$ er infimum over $f(t)$ for $t \in [x_{j-1}, x_j]$.

Forskellen på oversum og undersum afhænger af, hvor meget funktionen varierer indenfor hvert interval i inddelingen, og en begrænset funktion er Riemann integrabel, hvis man kan få denne variation under kontrol ved at vælge inddelingerne "fine nok". Det kan man sige på flere måder: f er integrabel, hvis

$$\inf\{U(f, P)|\text{P er en inddeling af}[a, b]\} = \sup\{L(f, P)|\text{P er en inddeling af}[a, b]\}$$

Venstresiden er *det øvre integral* og højresiden er *det nedre integral*. *Integralet* af en integrabel funktion er denne fælles værdi. (Definition s. 142)

En anden formulering: f er integrabel, hvis der findes en følge af inddelinger, $\{P_n\}$ så $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0$. (6.8).

En monotont voksende funktion er integrabel (6.9) og en trappefunktion er integrabel (6.10). Næste gang ser vi, at en kontinuert funktion er integrabel (6.18) (i alle disse eksempler underforstås, at f er en reel funktion på et lukket begrænset intervel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. **Litteratur** Fitzpatrick 6.1 og 6.2.

Husk at regne nogle opgaver om rækker!

8.15-8.45 Repetition - potensrækker, konvergensradius, Taylorudvikling, analytiske funktioner.

9.25-11.25 Opgaveregning (i grupperummene).

- Vis Proposition 0.5
- Find konvergensområdet for
  - $\Sigma_{k=0}^{\infty} k^{-1/2} x^k$
  - $\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{(2k+1)^2}$
  - $\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$
  - $\Sigma_{k=0}^{\infty} 3^{k^2} x^{k^2}$
- Lad $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ have konvergensradius R.
  - Hvad er konvergensradius for $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$

  - Hvad er konvergensradius for $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k (3x)^k$
- Opgaver fra sidst.

8:50-9:25 & 11.25-12.00 Forelæsning.

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 LISBETH FAJSTRUP
9220 AALBORG ØST FAJSTRUP@MATH.AAU.DK