Dagens program: Denne gang kombineres resultater fra teorien om metriske rum med resultater om integraler. I projektet på Mat1 analyseres fasediagrammer, og løsningskurver tegnes. Sætningen om eksistens og entydighed af løsninger til sædvanlige differentialer siger:
Lad $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ være en åben delmængde. Antag $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ er kontinuert og opfylder en *Lipschitzbetingelse*: Der findes $M \in \mathbb{R}$, så $|g(x, y_1) = g(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ for alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{O}$.
Antag $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. Da findes I, åbent interval med $x_0 \in I$, så differentialligningen (begyndelsesværdiproblemet)

$$f'(x) = g(x, f(x))$$

$$f(x_0) = y_0$$

har præcis en løsning $f : I \to \mathbb{R}$.
Beviset for sætningen går via 1) Omskrivning til en integralligning

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))dt$$

. 2) En kontraktion $T : h \to y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, h(t))dt$ på det metriske rum $\mathcal{C}(I_l, \mathbb{R})$, hvor $I_l = [x_0 - l, x_0 + l]$ og metrikken er supremumsmetrikken $d(f, g) = sup_{t \in I_l}\{|f(t) - g(t)|\}$. $\mathcal{C}(I_l, \mathbb{R}), d$ er fuldstændigt (Eks. 12.17 - og 9.29).
Det entydigt bestemte fikspunkt for T er løsningen til differentialligningen.
Litteratur: 12.3, Sætning 9.29 og Eksempel 12.17.

8.15-8.45 Repetition og perspektivering.

9:25–11.25 Opgaveregning (i grupperummene).

- 7.1.1 (brug Sætning 7.3)
- Lad $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ være de kontinuerete (og dermed begrænsede funktioner på $[a, b]$ med supremumsmetrikken (se ovenfor. Vis, at en følge $\{f_n\}$ i $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ konvergerer mht supremumsmetrikken hvis og kun hvis den konvergerer uniformt.
- Lad $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være $g(x, y) = 3y^{2/3}$. Vis, at g *ikke* opfylder en Lipschitz betingelse.
- 6.6.1
- 6.6.2

8.50-9:25 & 11.25–12.00 Forelæsning.

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8848 LISBETH FAJSTRUP
9220 AALBORG ØST FAJSTRUP@MATH.AAU.DK