

Dagens program: Vi skal tage hul på beviset for *Inversfunktionssætningen* og dens kollega *Implicitfunktionssætningen*

Vi ved, at en differentiabel funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kan approksimeres med den lineære afbildning $dF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (givet ved Jacobimatricen $DF(x_0)$ for F i x_0). Approximationen er god i en omegn af x_0 . Hvis F er *bijektiv* med differentiabel invers, F^{-1} , er $dF(x_0)$ en bijektiv lineær afbildning. Og Jacobimatricen for $d(F^{-1})(F(x))$ er $(DF(x))^{-1}$ - den inverse matrix.

Inversfunktionssætningen (IFS) siger, at man sommetider kan slutte den anden vej: Givet en C^1 funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ er åben. Hvis $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ er bijektiv (ækvivalent: hvis $\det(Df(x_0)) \neq 0$), så findes en åben delmængde $W \subseteq V$, så $f : W \rightarrow f(W)$ er bijektiv og f^{-1} er C^1 på $f(W)$.

For $n = 1$ siger sætningen $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ C^1 og $f'(x_0) > 0$. Så er f strengt voksende i en omegn I af x_0 og dermed bijektiv $f : I \rightarrow f(I)$. Den inverse $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ er differentiabel i $f(x_0)$ med $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Bemærk, at vi altså kan finde f^{-1} uden at kende funktionen f^{-1} .

En væsentlig ingrediens i beviset er middelværdisætningen.

Det er vigtigt, at f er C^1 - vi skal bruge, at når $\det(Df(x_0)) \neq 0$, så findes en omegn U af x_0 , så for $x \in U$ er $\det(Df(x)) \neq 0$, og det bruger kontinuitet.

Implicitfunktionssætningen, som behandles til næste kursusgang, handler om løsningsmængder til visse ligninger. Fra lineær algebra kan I beskrive løsningsmængden til en ligning $T(x) = b$, hvor $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineær afbildning. Det er et underrum af $\mathbb{R}^n$, med dimension $n - \text{rang}(T)$ eller n - "dimensionen af billedrummet for T ".

Løsningsmængden til ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hvor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ er en kugleflade med radius 1. Kuglefladen kan lokalt betragtes som en graf - omkring et punkt, der ikke ligger på "Ækvator", kan vi beskrive den med $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ eller $(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Find selv på grafbeskrivelser - fra $x - z$ -planen og fra $y - z$ -planen. Vi kan altså udtrykke en af koordinaterne som en funktion af de to andre - den er implicit givet ved de to andre.

Med $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ kan vi skrive ligningen $F(x, y, z) = 1$. *Implicitfunktionssætningen* giver en tilstrækkelig betingelse for, hvornår sådanne løsningsmængder lokalt kan betragtes som grafer - altså, en delmængde af de variable kan udtrykkes som en funktion af resten af de variable. Det afhænger af Jacobimatricen for F , og beviset anvender IFS.

Litteratur 16.1-16.3.

08:15–08:45 Repetition i G5-112 af, hvad vi lavede sidst, og så tager jeg hul på *Inversfunktionssætningen*.

09:25–11:25 Opgaveregning (i grupperummene).

- Betragt begyndelsesværdiproblemet $\frac{dx}{dt} = x, x(0) = 1$. Lad $x_0 = 1$ og udregn $x_n(t) = T^n(x_0)(t)$. Udregn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Får man det forventede?
- Hvilke af følgende funktioner $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ opfylder en Lipschitz betingelse på en åben omegn af nul?
 1. $f(t, x) = \frac{1}{1-x^2}$.
 2. $f(t, x) = |x|^\alpha$ for $\alpha \in (0, 1]$.
 3. $f(t, x) = x^2 \sin(1/x)$ for $x \neq 0$ og $f(t, x) = 0$ for $x = 0$.
- 16.1.1
- 16.1.9

08:50–9:25 og 11:25–12:00 Forelæsning (i G5-112) over 16.1-16.3, om *inverse funktioner*.

Med venlig hilsen
Lisbeth Fajstrup