Afgør (hvis muligt) for hver af følgende uendelige rækker, om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent, eller divergent. Bevis dine påstande. Hvis ekstra parametre optræder, undersøg da rækken for alle værdier af disse. Bemærk, at opgaverne ikke står efter sværhedsgrad!

$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} q^k \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} k^q \quad (c)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p} \quad (d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^p}$

$(e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \quad (f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} \quad (g)\ \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$

$(h)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$

$(i)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log k(\log\log k)^p} \quad (j)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \quad (k)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k!} \quad (l)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

$(m)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} \quad (n)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \quad (o)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^2+1}}$

$(p)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1} \quad (q)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{\sqrt{k^2+1}} \quad (r)\ \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k} \quad (s)\ \sum_{k=2}^{\infty} (\log k)^p$

$(t)\ \sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p\ (p>0) \quad (u)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p-k^q}\ (0<q<p) \quad (v)\ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-1/k}$

$(x)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-q^k}\ (0<q<p) \quad (y)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log(1+1/k)}$

$(z)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}} \quad (\text{æ})\ \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{1+k^2}-k) \quad (\text{ø})\ \sum_{k=2}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

$(\text{å})\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k} \quad (\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(\sqrt[3]{k}+1)^k} \quad (\beta)\ \sum_{k=1}^{\infty} (1-1/k)^{k^2} \quad (\gamma)\ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k}^{-1}$

$(\delta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k}^{-1} 2^{-k} \quad (\epsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{2^{k^2}} \quad (\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k} \quad (\zeta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}+k^2+4k^3}{k+17k^4}$

$(\eta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \log(1+3^{-k}) \quad (\theta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(\frac{1}{k}) \quad (\iota)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)+2^k}{k+5^k}$

$$(\kappa)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\log k}{k^2+1} \quad (\lambda)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)(k-1)} \quad (\mu)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log k}$$

$$(\nu)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^3} \quad (\xi)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^3} \quad (\pi)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \quad (\rho)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$$

1. Antag, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer. Vis, at $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ også divergerer.

2. Antag $a_k \geq 0$, og at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer. Vis, at $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}\, k^{-p}$ konvergerer hvis $p > 1/2$ (hint: betragt afsnitsfølgen, og brug Cauchy-Schwarz). Giv et modeksempel for $p = 1/2$.

3. Antag, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer absolut. Vis, at hver af følgende rækker også konvergerer absolut:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\,, \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}\ (\text{hvis } a_k \neq -1)\,, \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}\,.$$

4. Antag $a_k \geq 0$. Vis, at konvergens af $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ medfører konvergens af $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$.

5. Antag, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer. Vis, at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ divergerer.

6. Antag $a_k \geq 0$. Vis, at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k} < \infty$.

7. Antag $a_k \geq 0$, og at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer.
(a) Hvad kan man sige om konvergensen af $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$?
(b) Giv eksempler på, at både $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k a_k}$ og $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k^2}$ kan både konvergere og divergere.

Lisbeth Fajstrup
(Opgaverne er samlet sammen af Thomas Østergaard Sørensen.)