Prøveopgave D

Matematik 1A, efteråret 2006

Aalborg Universitets basisuddannelse

Studerende i Industri og Sundhedsteknologi

En beholder er delvist fyldt med en saltopløsning (af NaCl i vand). Koncentrationen regnes som massen af det opløste salt per volumen. Der omrøres så kraftigt, at koncentrationen til et hvert tidspunkt kan antages at være den samme overalt i beholderen; endvidere antages det, at der ikke sker nogen volumenændring ved sammenblanding af opløsninger med forskellig koncentration. Volumenet af den mængde opløsning, der strømmer enten til eller fra beholderen, kaldes strømningshastigheden.

Ind i beholderen pumpes en opløsning med koncentration c_i og indstrømningshastighed r_i; og ud fra beholderen ledes der opløsning bort med strømningshastighed r_u. Lad $x(t)$ betegne massen af det opløste salt i beholderen og $V(t)$ volumenet af opløsningen i beholderen til tiden t.

(1) Gør rede for at

$$\frac{dx}{dt} = c_i r_i - \frac{x}{V} r_u.$$

(2) Beholderen, som kan rumme i alt 500 liter, indeholder 300 liter af en opløsning med 50 kg salt, til tiden $t = 0$. Der pumpes dernæst en ny opløsning ind med koncentrationen $0,25$ kg/liter og indstrømningshastighed 10 liter/min, samtidig med at der ledes opløsning bort med 5 liter/min.

Hvis T betegner tidspunktet, hvortil beholderen er fyldt op, vis da at der for $0 \leq t \leq T$ gælder

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{2} - \frac{5}{300 + 5t} x. \tag{1}$$

(3) Find et udtryk for funktionen $x(t)$ og angiv dens definitionsmængde.

(4) Bestem saltkoncentrationen i beholderen, når den er fuld.

Teorispørgsmål: Redegør for løsning af differentialligninger på formen

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t), \qquad t \in I,$$

hvorved p og q er faste kontinuerte funktioner på et givet interval $I \subset \mathbb{R}$. Godtgør ved hjælp af løsningsformlen, at ligningen for hvert $t_0 \in I$ og $x_0 \in \mathbb{R}$ har en og kun en løsning $\varphi(t)$ for hvilken $\varphi(t_0) = x_0$.