Eksamen den 7. juni 2006 klokken 9.00-12.00 i Samhørende og partielle differentialligninger (DMS6, EMSD6, FACE6, VT6)

Opgavesættet er til besvarelse på 3 timer.
Bøger, notater, regnemaskiner o.lign. er tilladte hjælpemidler.
Der lægges vægt på at besvarelsen ledsages af forståelige forklaringer.

Opgave 1 (35 point)

Et mekanisk system består af to togvogne forbundne dels med en fjeder, dels med en støddæmper (som i Example 5.6.6 i Edwards og Penneys bog.)

Positionen af vogn 1 betegnes med den ubekendte funktion $x_1(t)$, idet t står for tiden; dens masse kaldes m_1. Tilsvarende størrelser $x_2(t)$ og m_2 benyttes for vogn 2.

Fjederkonstanten betegnes med k, og støddæmperens kraft antages proportional med den indbyrdes hastighed, dvs. af formen $-\delta(x_1'(t) - x_2'(t))$ for vogn 1, idet $\delta > 0$ er en konstant.

Luftmodstanden er proportional med hastigheden for hver vogn, dvs. af formen $-g_1 x_1'(t)$ hhv. $-g_2 x_2'(t)$.

I opgaven benyttes to hjælpefunktioner givet ved $x_3(t) = x_1'(t)$ og $x_4(t) = x_2'(t)$. Derved betragtes vektorfunktionen $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ som den ubekendte tilstandsfunktion.

(1) Brug Newtons 2. lov til at forklare hvorfor systemet af de to togvogne opfylder at

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t)$$

for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{-g_1-\delta}{m_1} & \frac{\delta}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{\delta}{m_2} & \frac{-g_2-\delta}{m_2} \end{pmatrix}.$$

(2) I det følgende er $m_1 = m_2 = k = \delta = 1$, mens $g_2 = 1$ og $g_1 = 0$ (så kun forreste vogn er udsat for luftmodstand).

Eftervis at A har egenværdierne $\lambda_0 = 0$ og $\lambda_1 = -1$, og at disse har multiplicitet 1 henholdsvis 3.

Vis at $\vec{v}_0 = (1, 1, 0, 0)$ og $v_1 = (0, 1, 0, -1)$ er egenvektorer for A, og forklar hvorfor $\lambda_1 = -1$ har *defekt* $d = 2$.

(3) Find en kæde af generaliserede egenvektorer hørende til $\lambda_1 = -1$. Opskriv dernæst det generelle udtryk for løsningen $\vec{x}(t)$ til $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.

(4) I hvilestillingen gives den bageste vogn (nr. 1) et pludseligt skub fremad: Derved er $x_1(0) = 0 = x_2(0)$, mens $x_1'(0) = v_0 > 0$ og $x_2'(0) = 0$. Vis da at

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_0(1 - e^{-t}) \\ x_2(t) &= v_0(1 - e^{-t} - te^{-t}). \end{aligned}$$

Slut heraf at den indbyrdes afstand mellem vognene til hvert $t > 0$ er mindre end i udgangsstillingen (trods den frie bevægelighed).

Opgave 2 (40 points)

En varmeledende stang er anbragt langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$, hvor temperaturen holdes konstant,

$$u(0, t) = A, \qquad u(L, t) = B \quad \text{for alle} \quad t > 0.$$

Den termiske diffusivitet betegnes med k.

(1) Opskriv varmeledningsligningen for stangen, og bestem den *stationære* temperaturfordeling, det vil sige den løsning $w(x)$, som ikke afhænger af tiden.

(2) Stangen analyseres nu med en begyndelsestemperatur $f(x)$. Vis at den *transiente* temperatur $v(x, t)$, givet ved

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x),$$

er løsning til følgende varmeledningsproblem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t), &\quad \text{for} \quad t > 0, \quad 0 < x < L; \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, &\quad \text{for} \quad t > 0; \\ v(x, 0) = f(x) - w(x) &\quad \text{for} \quad 0 < x < 50. \end{aligned}$$

(3) Udtryk $v(x,t)$ ved hjælp af Fourierkoefficienter, og bestem dernæst en formel for $u(x,t)$.

(4) Hvis $u(0,t) = 0$ og $u(50,t) = 100$, idet $L = 50$, og $f(x) = 0$ for $0 < x < 50$, hvad er da temperaturfordelingen til tiden t ?

For $k = 1$, hvad er temperaturen i stangens midtpunkt til tiden $t = 60$?

Opgave 3 (25 points)

(1) Lad a_1 og a_2 være to reelle parametre, og sæt

$$u(x_1, x_2, t) = (1 + (a_1 x_1 + a_2 x_2 - t)^2)^{-3/2}.$$

Find de partielle afledte af første orden for u. (Man kan simplificere lidt ved at indføre vektorerne $\vec{a} = (a_1, a_2)$ og $\vec{x} = (x_1, x_2)$.)

(2) Vis at $u(x_1, x_2, t)$ er en løsning til den to-dimensionale bølgeligning,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \qquad (*)$$

når vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ opfylder $a_1^2 + a_2^2 = c^{-2}$.

(3) Vis mere alment, at når $F(s)$ er en to gange differentiabel funktion af den ene variable s, da er begge funktionerne

$$F(\vec{a} \cdot \vec{x} - t) \quad \text{og} \quad F(\vec{a} \cdot \vec{x} + t)$$

løsninger til (*).

(Opgavesættet slut)