Reeksamen den 31. august 2006
klokken 9.00-12.00 i
Samhørende og partielle differentialligninger
(DMS6, EMSD6, FACE6, VT6)

Opgavesættet er til besvarelse på 3 timer.
Bøger, notater, regnemaskiner o.lign. er tilladte hjælpemidler.
Der lægges vægt på at besvarelsen ledsages af forståelige forklaringer.

Opgave 1 (20 point)

To togvogne tænkes forbundne med både en fjeder og en støddæmper (som i bogens eksempel side 394). Positionen af vogn 1 og 2 langs x-aksen betegnes med $x_1(t)$ og $x_2(t)$, mens $x_3(t) = x_1'(t)$ og $x_4(t) = x_2'(t)$ betegner deres hastigheder. Vognenes masser, fjeder- og dæmpningskonstanter samt gnidningskoefficienter er sådan, at tidsudviklingen bestemmes af følgende system af differentialligninger:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 8 & -6 & 2 \\ 8 & -8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Koefficientmatricen heri betegnes med A.

(i) Afgør om A har nogen defekte egenværdier. Hertil kan man udnytte at A's karakteristiske polynomium $p_A(\lambda)$ er givet ved

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 4)^3.$$

(Man behøver ikke gøre rede for, hvorfor p_A har denne form.)

(ii) Angiv samtlige løsninger til (1).

Opgave 2 (25 points)

Betragt den 1-dimensionale bølgeligning med bølgehastighed c,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= g(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= h(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Godtgør ved differentiation at selve bølgeligningen i (2) løses af enhver funktion af formen

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct), \tag{3}$$

når blot F og $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to gange differentiable.

Forklar hvorfor $u(x,t)$ fra (3) løser hele problemet i (2) hvis F og G opfylder

$$F(x) + G(x) = g(x), \qquad cF'(x) - cG'(x) = h(x). \tag{4}$$

(ii) Bestem $F(x) - G(x)$ ved hjælp af h. (*Vink:* Man kan begynde med at integrere sidste del af (4) fra 0 til x.) Udtryk dernæst de ubekendte F og G ved hjælp af de givne data g og h.

Udnyt dette til at vise at problemet (2) har en løsning af formen

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\, ds.$$

(Dette er d'Alemberts formel, som direkte viser løsningens afhængighed af dataene g og h. Man kan vise enhver løsning har denne form.)

Opgave 3 (35 points)

Med $u(x,t)$ betegnes temperaturfordelingen i en varmeledende stang S, som tænkes anbragt langs et koordinatsystems x-akse fra $x = 0$ til $x = L$. Idet stangens termiske diffusivitet betegnes med k, tænkes $u(x,t)$ endvidere at være løsning til varmeledningsproblemet

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad t>0,\ 0<x<L;\\
u(x,0) &= f(x) \quad \text{for} \quad 0<x<L;\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0 \quad \text{for} \quad t>0;\\
\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0 \quad \text{for} \quad t>0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(i) Angiv den fysiske fortolkning af randbetingelserne i (5).

(ii) Angiv et alment udtryk for $u(x,t)$ ved hjælp af Fourierkoefficienter til f. Bestem dernæst $u(x,t)$ i tilfældet hvor $f(x) = L - x$ for $0 \leq x \leq L$.

Stangen S tilføres dernæst en varmeeffekt på endefladen ved $x = L$ og afkøles tilsvarende ved $x = 0$. Den resulterende temperaturfordeling betegnes $v(x,t)$, mens $g(x)$ betegner begyndelsesfordelingen. Dermed er $v(x,t)$ en løsning til følgende varmeledningsproblem med inhomogene randbetingelser:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{for} \quad 0<x<L,\ t>0,\\
v(x,0) &= g(x) \quad \text{for} \quad 0<x<L,\\
\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) &= W \quad \text{for} \quad t>0,\\
\frac{\partial v}{\partial x}(L,t) &= W \quad \text{for} \quad t>0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(iii) Vis at funktionen $w(x) = Wx$ både løser varmeledningsligningen og opfylder randbetingelserne i (6).

Godtgør ved indsættelse at funktionen $u(x,t) = v(x,t) - w(x)$ løser varmeledningsproblemet (5) med $f(x) = g(x) - w(x)$.

(iv) Angiv en almen formel for $v(x,t)$, og bestem heraf $v(x,t)$ i tilfældet hvor g er den konstante funktion $g(x) = L \cdot V$.

Udled at man for store t med tilnærmelse har at $v(x,t) \approx W(x + L/2)$ for $0 < x < L$.

Opgave 4 (20 points)

Betragt det lineære system af differentialligninger med begyndelsesbetingelse:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 2 & 30 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Koefficientmatricen heri betegnes med B.

(i) Bestem eksponentialmatricen e^{tB} ved at udnytte at $B - 5I$ er nilpotent, idet I betegner enhedsmatricen.

Angiv løsningen $x_h(t)$ til det tilhørende homogene ligningssystem med begyndelsesbetingelse på formen $x_h(t) = e^{5t}(v_0 + tv_1 + t^2 v_2)$, hvorved v_0, v_1, v_2 er vektorer i $\mathbb{R}^3$.

(ii) Bestem løsningen $x(t)$ til (7), og opskriv den ved hjælp af $x_h(t)$ og yderligere led af formen $g(t)u$, hvori der indgår passende valgte vektorer $u \in \mathbb{R}^3$ og funktioner $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f.eks. t eller te^{5t}).

(Opgavesættet slut)