Om Riemann-integralet.
Noter til Matematik 1

Jon Johnsen
Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet
Fredrik Bajers Vej 7G, 9220 Ålborg Ø

3. december 2001

1 Indledning

Integralregning går tilbage til Newtons og Leibniz' arbejder i 1670'erne, men det var først i 1829 at Augustin Cauchy *beviste* at middelsummerne for en kontinuert funktion $f(x)$ på et interval $[a, b]$ konvergerer mod et fast tal; dette betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

I disse noter indfører vi det integralbegreb der blev introduceret af Bernhard Riemann i 1854, og der benyttes foruden middelsummer også over- og undersummer for funktioner på $[a, b]$. Det giver en fleksibel ramme for at udlede de væsenligste egenskaber ved Riemann-integralet, som vi også gør her.

2 Definitioner

Vi begynder med de centrale begreber. Lad $[a, b]$ være et lukket, begrænset interval (det er underforstået i notationen at $a < b$, når ikke andet nævnes). Ved en *inddeling* $\mathcal{P}$ af $[a, b]$ forstås en endelig delmængde

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

som opfylder $x_0 = a$, $x_n = b$, og $x_{j-1} < x_j$ for $j = 1, 2, \dots, n$. En inddeling $\mathcal{P}_1$ siges at være *finere* end $\mathcal{P}$, hvis $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ (mængdeinklusion). Mængden af alle inddelinger af et givet interval betegnes $\mathcal{I}[a, b]$.

Normen af en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a, b]$ er længden af det største delinterval bestemt af $\mathcal{P}$ og betegnes $\|\mathcal{P}\|$; det vil for $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sige

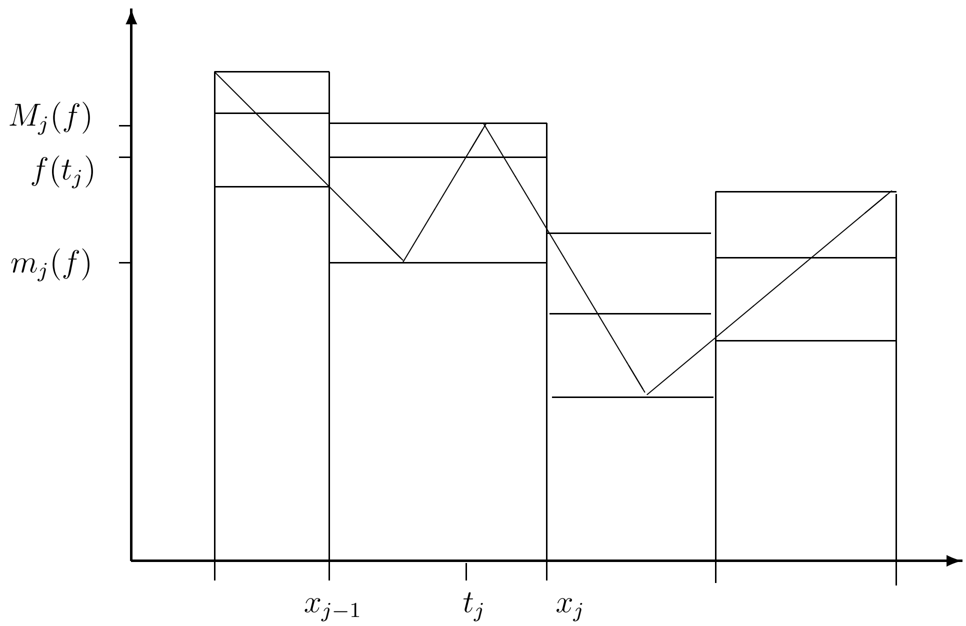
$$\|\mathcal{P}\| = \max\{x_j - x_{j-1} \mid j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Vi bemærker, at $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ medfører $\|\mathcal{P}_1\| \le \|\mathcal{P}\|$.

Givet en inddeling $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, så siges en n-tuppel $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ at være *underordnet* $\mathcal{P}$, hvis $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

Lad f være en begrænset reel funktion defineret på $[a,b]$. Givet $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$ og $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$, så definerer vi, jævnfør figur 1, *middelsummen* ved

$$S(\mathcal{P},\mathbf{t},f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{1}$$



Figur 1: Illustration til undersum, middelsum og oversum

For $j = 1, 2, \ldots, n$ indfører vi endvidere tallene

$$m_j(f) = \inf\{\, f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \,\} \tag{2}$$
$$M_j(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \,\} \tag{3}$$

og ved hjælp heraf definerer vi dernæst *undersummen* (L kommer fra “lower”)

$$L(\mathcal{P},f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(f)(x_j - x_{j-1}) \tag{4}$$

og *oversummen* (U kommer fra “upper”) ved

$$U(\mathcal{P},f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(f)(x_j - x_{j-1}). \tag{5}$$

Det følger umiddelbart af definitionerne, at vi har ulighederne

$$L(\mathcal{P},f) \le S(\mathcal{P},\mathbf{t},f) \le U(\mathcal{P},f) \tag{6}$$

for ethvert valg af $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$. Se figur 1 for et eksempel.

Med disse forberedelser kan vi nu definere Riemann-integrabilitet.

Definition 2.1. En begrænset funktion f på $[a,b]$ siges at være Riemann-integrabel på $[a,b]$, hvis der findes et tal A med følgende egenskab: Givet $\varepsilon > 0$, så findes en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$, således at for alle $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{I}[a,b]$ med $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ og alle $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}_1$ gælder

$$|S(\mathcal{P}_1, \mathbf{t}, f) - A| < \varepsilon.$$

I bekræftende fald skriver vi $A = \int_a^b f(x)dx$. Mængden af Riemann-integrable funktioner på $[a,b]$ betegnes $\mathcal{R}([a,b])$.

Det er klart fra definitionen, at der højst eksisterer ét tal A med denne egenskab, så notationen $A = \int_a^b f(x)dx$ giver mening.

Øvelse 2.1. Bevis påstanden om at der højst er et sådant A.

3 Om Riemann-integrabilitet

For at kunne bruges i praksis skal definition 2.1 suppleres med *kriterier* for integrabilitet. Vi giver to resultater; det første viser, at Riemann-integrabilitet også kan karakteriseres ved hjælp af oversummer og undersummer.

Sætning 3.1. *For en begrænset funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, hvor $[a,b]$ er et kompakt interval, er følgende egenskaber ækvivalente:*

(i) *Funktionen $f(x)$ er Riemann-integrabel, $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

(ii) *For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer der en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$, således at*

$$U(\mathcal{P}_1, f) - L(\mathcal{P}_1, f) < \varepsilon.$$

for enhver inddeling $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{I}[a,b]$ som opfylder $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$.

Til beviset for sætningen har vi brug for nogle observationer.

Lemma 3.2. *Antag, at f er en begrænset funktion på $[a,b]$. Antag, at $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{I}[a,b]$ og $\mathcal{P}_2 \supseteq \mathcal{P}_1$. Så gælder*

$$L(\mathcal{P}_1, f) \le L(\mathcal{P}_2, f) \quad \textit{og} \quad U(\mathcal{P}_2, f) \le U(\mathcal{P}_1, f).$$

Bevis. Det er nok at se på det tilfælde, hvor $\mathcal{P}_2$ har et punkt mere end $\mathcal{P}_1$. Kald dette punkt c, og antag $c \in \,]x_{j-1}, x_j[\,$. Sæt

$$\tilde{M}_1 = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1}, c]\}, \qquad \tilde{M}_2 = \sup\{f(x) \,|\, x \in [c, x_j]\}.$$

Så er $\tilde{M}_1 \le M_j(f)$ og $\tilde{M}_2 \le M_j(f)$ ifølge (3), og vi har

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_2, f) &= \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ k\neq j}} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \tilde{M}_1(c - x_{j-1}) + \tilde{M}_2(x_j - c) \\ &\le \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ k\neq j}} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + M_j(f)(c - x_{j-1}) \\ &\qquad\qquad\qquad + M_j(f)(x_j - c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = U(\mathcal{P}_1, f). \end{aligned} \tag{7}$$

Det viser det ene delresultat. Det andet vises på samme måde. ∎

Som konsekvens af lemmaet gælder der for alle $\mathcal{P}_1$, som er finere end $\mathcal{P}$, at

$$L(\mathcal{P}, f) \le L(\mathcal{P}_1, f) \le U(\mathcal{P}_1, f) \le U(\mathcal{P}, f).$$

Dette viser dels at det 'nytter' at gøre inddelingerne finere, dels at f. eks. undersummen $L(\mathcal{P}, f)$ hørende til en given inddeling $\mathcal{P}$ er mindre end eller lig enhver oversum svarende til en finere inddeling; dette vil sige at $L(\mathcal{P}, f) \le \inf\{\, U(\mathcal{P}_1, f) \mid \mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}\,\}$.

Det er et centralt punkt i beviset nedenfor at man faktisk kan tage infimum over *samtlige* oversummer, altså at der for ethvert $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$ gælder uligheden

$$L(\mathcal{P}, f) \le \inf\{\, U(\mathcal{P}', f) \mid \mathcal{P}' \in \mathcal{I}[a,b]\,\}. \tag{8}$$

Dette kan fås fra det ovenstående fordi der for enhver inddeling $\mathcal{P}' \in \mathcal{I}[a,b]$ gælder at $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ både er finere end $\mathcal{P}$ og $\mathcal{P}'$.

Endelig defineres det *øvre* og det *nedre* integral som, henholdsvis,

$$\overline{I}(f) = \inf\{U(\mathcal{P}, f) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]\} \tag{9}$$

$$\underline{I}(f) = \sup\{L(\mathcal{P}, f) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]\}. \tag{10}$$

Det følger direkte af (8) at $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$ (og det bliver vist nedenfor at lighedstegnet er ækvivalent med både (i) og (ii) i sætning 3.1).

BEVIS FOR SÆTNING 3.1. Antag først $f \in \mathcal{R}([a,b])$ og sæt $A = \int_a^b f(x)dx$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes ifølge definitionen på Riemann-integrabilitet en inddeling $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{I}[a,b]$, således at for alle $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$ med $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ og alle $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$ gælder

$$|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - A| < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{11}$$

Lad nu $\mathcal{P}$ være valgt vilkårligt så $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$, men fastholdt i resten af denne del af beviset. Bruges (11) for to forskellige, underordnede n-tupler $\mathbf{t}$ og $\mathbf{s}$, så fås

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - S(\mathcal{P}, \mathbf{s}, f)| &= |\sum_{j=1}^{n}(f(t_j) - f(s_j))(x_j - x_{j-1})| \\ &\le |\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - A| + |A - \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1})| < \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Sæt nu $\mu = \varepsilon/(3(b-a))$. Bruger vi definitionen af $M_j(f)$ og $m_j(f)$ som henholdsvis et supremum og et infimum, kan vi finde $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ således at

$$M_j(f) < f(t_j) + \mu/2,$$

og $s_j \in [x_{j-1}, x_j]$, således at

$$m_j(f) > f(s_j) - \mu/2.$$

Heraf følger $M_j(f) - m_j(f) < f(t_j) - f(s_j) + \mu$ og dernæst at

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \\ &< \sum_{j=1}^{n} (f(t_j) - f(s_j))(x_j - x_{j-1}) + \mu \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \mu(b-a) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{13}$$

Det beviser at (i) medfører (ii).

Antag nu at betingelsen (ii) er opfyldt. Så gælder $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, hvilket kan ses på følgende måde: Lad $\varepsilon > 0$ være fast men vilkårligt. Så findes efter antagelsen en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a, b]$ med $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$. Men så har vi

$$\overline{I}(f) \leq U(\mathcal{P}, f) < L(\mathcal{P}, f) + \varepsilon \leq \underline{I}(f) + \varepsilon,$$

og derfor

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon.$$

Da ε er vilkårlig, følger $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Ideen er at vise, at f er integrabel, i henhold til definitionen, med integral

$$A := \int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f). \tag{14}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Bestem nu $\mathcal{P}'$ således, at $U(\mathcal{P}', f) < \overline{I}(f) + \varepsilon$. Så gælder ifølge lemma 3.2 at

$$U(\mathcal{P}, f) < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}'$. Tilsvarende bestemmes $\mathcal{P}''$ således, at

$$L(\mathcal{P}, f) > \underline{I}(f) - \varepsilon$$

for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}''$, hvor vi igen har brugt lemma 3.2. Sæt $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ og antag at $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ er vilkårlig. Så gælder for et vilkårligt $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} A - \varepsilon = \underline{I}(f) - \varepsilon < L(\mathcal{P}, f) &\leq S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) \\ &\leq U(\mathcal{P}, f) < \overline{I}(f) + \varepsilon = A + \varepsilon \end{aligned} \tag{15}$$

og følgelig

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - A| < \varepsilon.$$

Det beviser, at f er Riemann-integrabel. $\square$

Bemærk den finte, at en funktion $f \in \mathcal{R}([a,b])$ som konsekvens af sætningen nødvendigvis også er Riemann-integrabel over ethvert delinterval $[\alpha, \beta]$ af sin definitionsmængde. (Dette faktum er nemt at tage for givet, men bør bevises.)

Ved hjælp af ovenstående sætning 3.1 kan vi nu bevise hovedresultatet.

Sætning 3.3. *Antag, at f er kontinuert på $[a,b]$. Så gælder $f \in \mathcal{R}([a,b])$, altså at f er Riemann-integrabel på $[a,b]$.*

Bevis. Beviset udnytter at f's kontinuitet på det kompakte interval $[a,b]$ er uniform (se Apostol Theorem 4.47). Da f er kontinuert og $[a,b]$ er kompakt, er f begrænset; vi kan derfor bruge sætning 3.1 i beviset. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Bestem $\delta > 0$, således at $|x - y| < \delta$ medfører $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2(b-a))$ for alle $x, y \in [a,b]$. Det er muligt, da f er uniformt kontinuert. Lad $\mathcal{P}$ være en inddeling med $\|\mathcal{P}\| < \delta$ og lad $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ være vilkårlig. Da $f(x)$ antager begge værdierne $M_j(f)$ og $m_j(f)$ på det kompakte interval $[x_{j-1}, x_j]$, og da længden af ethvert sådant delinterval af $\mathcal{P}_1$ er mindre end δ, så følger uligheden $M_j(f) - m_j(f) \leq \varepsilon/(2(b-a))$ og dermed

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_1, f) - L(\mathcal{P}_1, f) &= \sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{16}$$

Det viser ifølge sætning 3.1 at $f \in \mathcal{R}([a,b])$. $\square$

I matematisk litteratur betegner $\mathcal{C}([a,b])$ ofte rummet af reelle, kontinuerte funktioner på $[a,b]$ — dermed er sætningens udsagn at $\mathcal{C}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b])$.

Øvelse 3.1. Gennemfør argumentet for (8) i alle detaljer.

Øvelse 3.2. Bevis at funktionen $f(x)$ der er 1 for $x = 0$ og ellers er nul på $[-1,1]$ er Riemann-integrabel på $[-1,1]$ med integral 0.

Øvelse 3.3. Godtgør påstanden efter sætning 3.1 om integrabilitet over ethvert delinteval.

4 Egenskaber ved Riemann-integralet

Nedenfor følger en samling nyttige integrationsresultater, med kortfattede beviser.

Sætning 4.1. *$\mathcal{R}([a,b])$ er et reelt vektorrum. For $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ og $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ gælder*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis. Sæt $h = c_1 f + c_2 g$. Så gælder for alle $\mathcal{P}$ og alle underordnede $\mathbf{t}$ at

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, h) = c_1 S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) + c_2 S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, g).$$

Givet $\varepsilon > 0$, så kan vi bestemme en inddeling $\mathcal{P}'$, således at for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}'$ gælder

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

og en inddeling $\mathcal{P}''$, således at for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}''$ gælder

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, g) - \int_a^b g(x)dx| < \varepsilon.$$

Sæt nu $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$. Så gælder for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, h) - c_1 \int_a^b f(x)dx - c_2 \int_a^b g(x)dx| < |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon.$$

Heraf følger resultatet. ∎

Det næste resultat kendes som indskudssætningen.

Sætning 4.2. *Antag $c \in]a, b[$ og at f er Riemann-integrabel over to af de tre intervaller $[a, b]$, $[a, c]$ og $[c, b]$. Så er f også Riemann-integrabel over det tredje, og der gælder*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{17}$$

Bevis. Vi antager, at f er integrabel over $[a, c]$ og $[c, b]$. Givet $\varepsilon > 0$, så findes der en inddeling $\mathcal{P}_0'$ af $[a, c]$, således at for alle $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}_0'$ gælder

$$|S(\mathcal{P}', \mathbf{t}', f) - \int_a^c f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

og en inddeling $\mathcal{P}_0''$ af $[c, b]$, således at for alle $\mathcal{P}'' \supseteq \mathcal{P}_0''$ gælder

$$|S(\mathcal{P}'', \mathbf{t}'', f) - \int_c^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2};$$

herved er $\mathbf{t}'$ og $\mathbf{t}''$ vilkårlige tupler underordnede $\mathcal{P}'$ og $\mathcal{P}''$. Vi sætter $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0' \cup \mathcal{P}_0''$. Lad nu $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ og lad $\mathbf{t}$ være underordnet $\mathcal{P}$. Så defineres

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap [a, c], \qquad \mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cap [c, b], \tag{18}$$

med en tilsvarende opspaltning $\mathbf{t} = (\mathbf{t}', \mathbf{t}'')$. Så er $\mathcal{P}'$ en inddeling af $[a, c]$ og $\mathcal{P}''$ en inddeling af $[c, b]$, og der gælder

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) = S(\mathcal{P}', \mathbf{t}', f) + S(\mathcal{P}'', \mathbf{t}'', f).$$

Fordi $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}_0'$ og $\mathcal{P}'' \supseteq \mathcal{P}_0''$ giver trekantsuligheden derfor at

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Resultatet følger heraf. De andre tilfælde behandles på samme måde. ∎

Vi indfører de sædvanlige konventioner og sætter $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ og $\int_a^a f(x)dx = 0$. Derefter gælder (17) for vilkårlig beliggenhed af a, b og c:

Korollar 4.3. *Uden forudsætning om a, b, $c \in \mathbb{R}$ gælder Sætning 4.2 i øvrigt ordret (med passende fortolkning af $[a,b]$ for $b < a$ osv.).*

At Riemann-integralet respekterer den naturlige ordning af reelle funktioner er indholdet af

Sætning 4.4. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,b])$ og $g \in \mathcal{R}([a,b])$, og at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$. Så gælder*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Specielt gælder for en ikke-negativ funktion, det vil sige $f(x) \geq 0$ for $x \in [a,b]$, at $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Bevis. Hvis $f(x) \geq 0$, følger det af definitionen på middelsum at

$$0 \leq S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f)$$

for ethvert $\mathcal{P}$ og ethvert underordnet $\mathbf{t}$. Men så er $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Heraf følger sætningen umiddelbart ved at anvende det foregående på $g - f$. ∎

For en funktion f betegner $|f|$ funktionen givet ved $|f|(x) = |f(x)|$. Man da har nedestående resultat, som er fundamentalt for at kunne vise uligheder mellem integraler.

Sætning 4.5. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Så er $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ og der gælder*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx. \tag{19}$$

Bemærk at det af forudsætningen følger at $a < b$. Dersom $b < a$ gælder ifølge sætningen $|\int_b^a f(x)\,dx| \leq \int_b^a |f(x)|\,dx$. Idet $\int_b^a |f(x)|\,dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$, er det så i alle tilfælde vist at

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \Big|\int_a^b |f(x)|\,dx\Big|, \quad \text{for} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Denne formulering er dog ret akavet, da der stadig optræder numerisk værdi af integralet på ulighedens højre side. Da det ydermere er klart at (19) er forkert hvis $b < a$, så nøjes vi med at have præmissen at $a < b$ stående indirekte i kravet $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Bevis. Betragt et $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,b]$, og hold x_{j-1}, $x_j \in \mathcal{P}$ fast. For vilkårlige x, $y \in [x_{j-1}, x_j]$ haves

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_j(f) - m_j(f) \tag{20}$$

og det følger heraf at

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) \leq M_j(f) - m_j(f).$$

Multiplikation med $x_j - x_{j-1}$ og summation giver nu at

$$U(\mathcal{P}, |f|) - L(\mathcal{P}, |f|) \leq U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f).$$

Da det gælder for alle inddelinger, giver sætning 3.1, at $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Vi har $f \leq |f|$ og $-f \leq |f|$, så uligheden følger fra sætning 4.4. ∎

Bemærkning 4.6 *(Advarsel).* Der gælder *ikke* at $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ medfører $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dette er en af de største svagheder ved Riemann-integralet. Som illustration kan man betragte funktionen på $[0,1]$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \text{ irrational,} \\ -1 & \text{for } x \text{ rational.} \end{cases}$$

Så gælder $U(\mathcal{P}, f) = 1$ og $L(\mathcal{P}, f) = -1$ for alle inddelinger $\mathcal{P}$ af $[0,1]$. Men så er f ikke Riemann-integrable ifølge sætning 3.1. På den anden side er $|f|$ lig den konstante funktion 1, som er Riemann-integrabel.

Der findes dog et mere generelt integral opkaldt efter Henri Lebesgue (1902), hvor klassen $\mathcal{L}([a,b])$ af Lebesgue-integrable funktioner er så meget større end $\mathcal{R}([a,b])$ at man kan "manøvrere mere frit". Blandt andet gælder der alment at $f \in \mathcal{L}([a,b])$ hvis og kun hvis $|f| \in \mathcal{L}([a,b])$. Det vil dog føre for vidt at komme ind på dette her.

Det er under tiden nyttigt at vide at $\mathcal{R}([a,b])$ er lukket under punktvis multiplikation, hvilket er oplagt for underrummet $\mathcal{C}([a,b])$; men det gælder også alment:

Sætning 4.7. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,b])$ og $g \in \mathcal{R}([a,b])$. Så er $fg \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Bevis. Vi bruger først sætning 3.1 for at behandle tilfældet $f = g$. Der gælder både $M_j(f^2) = (M_j(|f|))^2$ og $m_j(f^2) = (m_j(|f|))^2$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} M_j(f^2) - m_j(f^2) &= (M_j(|f|) + m_j(|f|))(M_j(|f|) - m_j(|f|)) \\ &\leq 2K(M_j(|f|) - m_j(|f|)), \end{aligned} \tag{21}$$

hvor begrænsetheden af f er brugt til at bestemme en konstant K, så $|f(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,b]$. Men så følger resultatet af sætning 4.5 og sætning 3.1.

Resultatet følger for vilkårlige f og g i $\mathcal{R}([a,b])$ af identiteten

$$2f(x)g(x) = (f(x) + g(x))^2 - (f(x))^2 - (g(x))^2$$

og sætning 4.1 samt første del af beviset. ∎

De to næste resultater kendes under navnet "differential- og integralregningens hovedsætning".

Sætning 4.8. *Antag, at f er kontinuert på $[a,b]$ og definér for $x \in [a,b]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Så er F kontinuert differentiabel på $[a,b]$, og der gælder $F'(x) = f(x)$.

Bevis. For vilkårlige to punkter x og $x+h$ i $[a,b]$ haves

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \tag{22}$$

Givet $\varepsilon > 0$ og $x \in [a,b]$, så kan vi på grund af kontinuiteten af f bestemme et $\delta > 0$, så $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ for alle t i kuglen $B_{[a,b]}(x,\delta)$. Definitionen på grænseværdi, sætning 4.5 og (22) giver derfor resultatet. ∎

Bemærk at de afledte af F i a og b nødvendigvis skal forstås som ensidede; og at beviset for $x = a$ eller $x = b$ tager højde for det ved at referere til kuglen $B_{[a,b]}(x,\delta)$ i det metriske delrum $[a,b]$ (som for $x \in]a,b[$ og δ tilstrækkeligt lille blot er $]x-\delta, x+\delta[$).

I den omvendte retning haves, endda under svagere forudsætninger,

Sætning 4.9. *Lad F være kontinuert på $[a,b]$ og differentiabel på $]a,b[$ med Riemann-integrabel differentialkvotient; det vil sige $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in]a,b[$ og $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Så gælder*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bevis. Lad $\mathcal{P}$ være en vilkårlig inddeling af $[a,b]$. Så gælder

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n F'(t_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}), \end{aligned} \tag{23}$$

hvor $t_j \in]x_{j-1}, x_j[$ er bestemt ved at anvende middelværdisætningen (Apostol Theorem 5.11). For hvert fast $\varepsilon > 0$ kan vi nu bestemme en inddeling, som er så fin, at vi har

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx| = |\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Da venstresiden er uafhængig af ε, og da ε er vilkårlig, følger resultatet. ∎

Øvelse 4.1. Bevis korollar 4.3.

Øvelse 4.2. Brug sætning 4.4 til at vise at der for hver kontinuert funktion f på $[a, b]$ findes et tal $\xi \in [a, b]$ så

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Dette kendes som *integralregningens middelværdisætning*. Vis at man endda kan slutte at $\xi \in]a, b[$.

Øvelse 4.3. Verificer ulighederne i beviset for sætning 4.5.

Øvelse 4.4. Verificer den sidste påstand i beviset for sætning 4.8

5 Riemann-integralet af komplekse funktioner

Konstruktionen af integralet udvides nu til funktioner, der afbilder et interval $[a, b]$ over i de komplekse tal. Vi minder om, at en funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ kan skrives som $f = \mathrm{Re}f + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}f$.

Definition 5.1. En begrænset funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ kaldes Riemann-integrabel på $[a, b]$, hvis $\mathrm{Re}f \in \mathcal{R}([a, b])$ og $\mathrm{Im}f \in \mathcal{R}([a, b])$; for sådanne f sættes

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)dx + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}f(x)dx.$$

Mængden af komplekse Riemann-integrable funktioner betegnes $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$

Bemærk, at med denne definition er

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)dx \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Im}f(x)dx.$$

Som en umiddelbar konsekvens af definitionen og sætning 4.1 haves:

Sætning 5.2. $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ *er et komplekst vektorrum. Afbildningen*

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

er en lineær afbildning fra $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ *til* $\mathbb{C}$.

For håndteringen af integraler af komplekse funktioner er det næste resultat meget vigtigt.

Sætning 5.3. *Lad* $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$. *Så er* $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$, *og der gælder*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bevis. Før uligheden vises må vi give mening til integralet på højre side, altså vise påstanden om at $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Ved at bruge (dele af) formel (20) på både $\mathrm{Re} f$ og $\mathrm{Im} f$, ses det at der til hvert delinterval $[x_{j-1}, x_j]$ af en inddeling $\mathcal{P}$ gælder

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(y)| &\leq |f(x) - f(y)| \\ &\leq |\mathrm{Re} f(x) - \mathrm{Re} f(y)| + |\mathrm{Im} f(x) - \mathrm{Im} f(y)| \\ &\leq M_j(\mathrm{Re} f) - m_j(\mathrm{Re} f) + M_j(\mathrm{Im} f) - m_j(\mathrm{Im} f). \end{aligned} \tag{24}$$

Deraf fås at

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) \leq M_j(\mathrm{Re} f) - m_j(\mathrm{Re} f) + M_j(\mathrm{Im} f) - m_j(\mathrm{Im} f),$$

hvorfor man ved multiplikation med $x_j - x_{j-1}$ og summation over j finder

$$U(\mathcal{P}, |f|) - L(\mathcal{P}, |f|) \leq \big(U(\mathcal{P}, \mathrm{Re} f) - L(\mathcal{P}, \mathrm{Re} f)\big) + \big(U(\mathcal{P}, \mathrm{Im} f) - L(\mathcal{P}, \mathrm{Im} f)\big).$$

Nu ses at $|f|$ er i $\mathcal{R}([a,b])$, for til givet ε findes en inddeling $\mathcal{P}_0$ for hvilken begge led på højre side er $< \varepsilon/2$ for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$.

Bestem nu et $\theta \in \mathbf{R}$, så at

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = e^{i\theta} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{i\theta} f(x)dx.$$

Vi har da, idet vi bruger sætningerne 4.5 og 4.4,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= \mathrm{Re} \int_a^b e^{i\theta} f(x)dx \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{i\theta} f(x))dx \\ &\leq \int_a^b |\mathrm{Re}(e^{i\theta} f(x))|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned} \tag{25}$$

Heraf følger sidste del af sætningen. $\square$

I kraft af dette resultat kan hovedsætningen, sætning 4.8, vises (med et lignende bevis) for funktioner med komplekse værdier.

6 Riemann-integralet af vektorfunktioner

Nu betragtes funktioner, der afbilder et interval $[a,b]$ over i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. For simpelhedens skyld skrives dette som $\mathbb{L}^n$, der altså er et vektorrum over legemet $\mathbb{L}$. Som bekendt er det sædvanlige indre produkt i dette rum givet ved $u \cdot v = u_1\bar{v_1} + \cdots + u_n\bar{v_n}$, og $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}$.

Det bemærkes at der for alle $u \in \mathbb{L}^n$ gælder den elementære ulighed

$$\|u\| \leq |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|; \tag{26}$$

dette kan ses ved at kvadrere begge sider hvorved der kommer 'ekstra' led på højre side af formen $2|u_k||u_m|$, der alle er positive.

Idet funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{L}^n$ kan skrives som n-tupler af funktioner, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ er følgende definition naturlig.

Definition 6.1. En begrænset funktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}^n$ kaldes Riemann-integrabel på $[a, b]$, hvis $f_j \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ for hvert $j = 1,\dots,n$; for sådanne f sættes

$$\int_a^b f(x)dx = (\int_a^b f_1(x)\, dx, \dots, \int_a^b f_n(x)\, dx).$$

Mængden af Riemann-integrable vektorfunktioner betegnes $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{L}^n)$.

Bemærk at integralet af en vektorfunktion hermed bliver en vektor i $\mathbb{L}^n$.

Ved at ræsonnere på hver komponent f_j af f kan man relativt let overføre de fleste af de tidligere viste resultater for $\mathcal{R}([a, b])$ eller $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ (alt efter som $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{L} = \mathbb{C}$). Eksempelvis ses det let $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{L}^n)$ er et vektorrum over $\mathbb{L}$ og at integralet er en lineær afbildning fra dette rum ind i $\mathbb{L}$.

Imidlertid er der en vigtig egenskab der fortjener at blive vist i detaljer.

Sætning 6.2. *Lad $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{L}^n)$. Da gælder at $x \mapsto \|f(x)\|$ er en funktion i $\mathcal{R}([a, b])$, og*

$$\| \int_a^b f(x)\, dx\| \le \int_a^b \|f(x)\|\, dx. \tag{27}$$

Bevis. For at vise integrabiliteten af $\|f(x)\|$ går vi frem på samme måde som i beviset for sætning 5.3. Ved at bruge uligheden (26) fås for $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ at

$$\begin{aligned} \|f(x)\| - \|f(y)\| &\le \|f(x) - f(y)\| \\ &\le \sum_{k=1}^n |f_k(x) - f_k(y)| \le \sum_{k=1}^n (M_j(f_k) - m_j(f_k)). \end{aligned} \tag{28}$$

Som i beviset for sætning 4.5 og 5.3 sluttes nu at

$$U(\mathcal{P}, \|f\|) - L(\mathcal{P}, \|f\|) \le \sum_{k=1}^n \big(U(\mathcal{P}, f_k) - L(\mathcal{P}, f_k)\big).$$

Her kan højre side gøres mindre end et givent ε ved at tage $\mathcal{P}$ tilstrækkeligt fin, så integrabiliteten af $\|f\|$ følger. For $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ gås frem på samme måde, blot skal man yderligere spalte op i real- og imaginærdele af f_k fra og med den miderste ulighed i (28); jævnfør beviset for sætning 5.3.

Endelig findes der til hvert $v \in \mathbb{L}^n$ en enhedsvektor u som opfylder $\|v\| = u \cdot v$, for eksempel $u = \frac{1}{\|v\|} v$. Specielt gælder dette for $v = \int_a^b f(x)\, dx$, og det noteres at $u \cdot f(x)$ er i $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ hvormed også $|u \cdot f(x)|$ er integrabel ifølge sætning 5.3. Vi får da af integralets linearitet og Cauchy–Schwarz' ulighed at

$$\begin{aligned} \| \int_a^b f(x)\, dx\| = \int_a^b u \cdot f(x)\, dx = | \int_a^b u \cdot f(x)\, dx| &\le \int_a^b |u \cdot f(x)|\, dx \\ \le \int_a^b \|f(x)\| \|u\|\, dx = \int_a^b \|f(x)\|\, dx. \end{aligned} \tag{29}$$

I den sidste ulighed indgik sætning 4.4 og den viste integrabilitet af $\|f(x)\|$. Dermed er sætningen bevist. $\square$