

Matematik 1A, efteråret 2003

Den teknisk-naturvidenskabelige basisuddannelse

Industri- og landinspektørretningen

Prøveopgave A

Et køletårn K er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2. \quad (1)$$

Mere præcist er $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \quad |z| \leq h\}$ for givne tal $a > 0$ og $h > 0$.

1. Lav en skitse af K for $a = 1$ og $h = 2$.
2. Bestem en funktion af to variable $f(x, y)$, hvis billede er K 's øvre halvdel. Hvad er definitionsmængden R for f ?
3. Lad $P_0(x_0, y_0, 0) \in K$. Vis at de to rette linier

$$\begin{aligned} &(x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, a), \quad t \in \mathbf{R} \\ &(x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, -a), \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

begge er indeholdt i fladen bestemt ved (1). Hvordan kan man udnytte dette konstruktivt når K skal bygges i praksis?

4. Bestem gradienten ∇f for funktionen f fra 2) i et punkt $P_1(x_1, y_1, z_1) \in K$ og vis at tangentplanen til K i P_1 er givet ved ligningen

$$x_1x + y_1y - z_1z = a^2.$$

5. **landinspektørretningen:** Skitser tangentplanen til K i et punkt af formen $P_0(x_0, y_0, 0) \in K$ og relater linierne i 3) til tangentplanen.

industriretningen: Beregn, for givne konstanter a og h , rumfanget for en væske, der fylder hele køletårnet K .

Teorispørgsmål:

Gradient og tangentplan for funktioner af flere variable.