Matematik 1A, efteråret 2004

Den teknisk-naturvidenskabelige basisuddannelse

Studerende i Byggeri og anlæg og Industri

Prøveopgave A

Et køletårn K er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2. \tag{1}$$

Mere præcist er $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \quad |z| \leq h\}$ for givne tal $a > 0$ og $h > 0$.

1. Skitser K og bestem en funktion af to variable $f(x, y)$, hvis billede er K's øvre halvdel. Angiv definitionsmængden for f.

2. Lad $P_0(x_0, y_0, 0) \in K$. Vis at de to rette linier

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, a), \quad t \in \mathbf{R} \\ (x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, -a), \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

   begge er indeholdt i fladen bestemt ved (1). Hvordan kan man udnytte dette konstruktivt når K skal bygges i praksis?

3. Vis at tangentplanen til K i $P_1(x_1, y_1, z_1)$ er givet ved ligningen

$$x_1 x + y_1 y - z_1 z = a^2.$$

   (*Vink:* Opfat K som en niveauflade for en funktion af tre variable.) Forklar hvorfor linierne ovenfor tilhører tangentplanen i P_0.

4. Bestem for givne konstanter a og h, rumfanget for en væske, der fylder hele køletårnet K.

Teorispørgsmål:

Gradient og tangentplan for funktioner af flere variable.