Matematik 2A, foråret 2005
Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Prøveopgave nr. B

I mekanisk fysik (og spændingslære) mødes såkaldte *kvadratiske former*. Disse er funktionsudtryk af formen

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

hvorved a, b,…, $f \in \mathbb{R}$ er konstanter.

Opgaven belyser hvorledes kvadratiske former med fordel kan analyseres ved hjælp af matrixdiagonalisering.

(I) Betragt i $\mathbb{R}^3$ ligningen

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz = 1 \tag{2}$$

Skriv denne om til en matrixligning af formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ for en passende valgt symmetrisk matrix $A_{3,3}$ (dvs. $A^T = A$).

(II) Gør rede for hvornår en $n \times n$-matrix M er diagonaliserbar.

(III) Find en diagonalmatrix D som er similær med A og vis at (2) har en ellipsoide som løsningsmængde.

Vink: Substituer $A = PDP^{-1}$ i $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ og indfør passende nye koordinater.

(IV) For et stift legeme L vises det i mekanikken at der for inertimomentet $I_\mathbf{r}$ hørende til rotation om en fast linie gennem origo med retningsvektor $\mathbf{r} = (x,y,z)$ gælder at

$$I_\mathbf{r} = x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xyD_{xy} - 2xzD_{xz} - 2yzD_{yz} \tag{3}$$

hvori indgår elementerne af inertimatricen $I = \begin{pmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{pmatrix}$, der kan bestemmes ved integration (som omtalt i mat1a).

Vis at når $\mathbb{R}^3$ udstyres med en basis $\mathcal{B}$ af egenvektorer for I, hvorved punkterne får koordinater $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = (u,v,w)$, så opnås det simplere udtryk $I_\mathbf{r} = I_1u^2 + I_2v^2 + I_3w^2$, hvor de såkaldte principale inertimomenter I_1, I_2 og I_3 er egenværdier for I.

(*Vink:* Man kan bruge at en symmetrisk matrix M opfylder $M = PDP^{-1}$ for en matrix P med den egenskab at $P^T = P^{-1}$ (spektralsætningen).)

(V) Hvordan kan man finde den retning hvori $I_\mathbf{r}$ er størst mulig ?